Anwendung von Markoffschen Ketten zur Beschreibung von Strategien der Flugspurverfolgung bei der Multi - Radar - Beobachtung

---

Inaugural - Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

---

vorgelegt von
W. Pandikow
aus Tribsees

1970

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546516_0009

Anwendung von Markoffschen Ketten zur Beschreibung von Strategien der Flugspurverfolgung bei der Multi - Radar - Beobachtung

---

Inaugural - Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Mathematisch - Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Freien Universität Berlin

---

vorgelegt von
W. Pandikow
aus Tribsees

1. Referent: Prof. Dr. Grotemeyer

2. " Prof. Dr. Jaecker

Tag der mündl. Prüfung: 27. DEZ 1969

Tag der Promotion: 28. MRZ. 1970

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Ich danke den Herren Professoren Dr. Grotemeyer und Professor Dr. Jaeckel für das Interesse, das sie dieser Arbeit entgegengebracht haben und für ihre hilfreiche Unterstützung.

Herrn Dr. Springer, der mir in großzügiger Weise die Durchführung und Fertigstellung der Arbeit am Institut für Funk und Mathematik ermöglichte, gilt mein aufrichtiger Dank.

Den Mitarbeitern der mathematischen Abteilung, H. Hönerloh, Dr. v. Issendorff und Dr. van Keuk danke ich für viele wertvolle Diskussionen und Anregungen.

INHALTSÜBERSICHT

		Seite
1.	Einleitung und Aufgabenstellung	1 - 14
2.	Markoffsche Ketten	15 - 18
3.	Mittlere Zustandszeiten in Markoffschen Ketten	19 - 26
4.	Die Markoffsche Kette für ungestörte Echtspuren	27 - 56
	4.1. Ungestörte Echtspuren im Mono-Radar-Verfahren	27 - 34
	4.2. Ungestörte Echtspuren ohne Informationsaustausch im Multi-Radar-Verfahren	35 - 46
	4.3. Ungestörte Echtspuren mit Informationsaustausch im Multi-Radar-Verfahren	47 - 56
5.	Die Markoffsche Kette für gestörte Echtspuren	57 - 84
	5.1. Gestörte Echtspuren im Mono-Radar-Verfahren	65 - 73
	5.2. Gestörte Echtspuren im Multi-Radar-Verfahren	74 - 84
6.	Numerische Ergebnisse	85 - 99
7.	Literatur	100 — 103

Einleitung und Aufgabenstellung

In [4] ist ein Verfahren zur automatischen Auswertung der Daten mehrerer Radargeräte mit Digitalrechnern beschrieben worden. Die Aufgabe der automatischen Luftraumbeobachtung ist es, mit Hilfe der Empfangssignale der Radargeräte ein Luftlagebild aufzubauen, das Basis einer automatisierten Flugsicherung ist. Aus Gründen der Betriebssicherheit und der Verteilung der erforderlichen Rechenleistung auf mehrere zeitlich parallel arbeitende Rechner ist eine dezentrale Form des Verarbeitungssystems angestrebt worden. Für den Sichtbereich jedes Radargerätes baut je ein Programm (Mono-Radarprogramm) ein Luftlagebild auf. Die Einzelluftlagebilder werden durch ein Zentralprogramm zu einem Gesamtluftlagebild zusammengefaßt, das auf ein einziges Koordinatensystem bezogen ist. Die Mono-Radarprogramme und das Zentralprogramm arbeiten zeitlich parallel.

Die Radarsignale bestehen aus Zielsignalen, die Echosignale von Flugobjekten im Radarsichtbereich sind und aus Störsignalen. Die Radarsignale werden als Polarkoordinaten r und φ einem Digitaldetektor eingegeben. Die Koordinaten r und φ stellen die Gitterpunkte eines ebenen Polarkoordinatenrasters (Meßpunktraster) dar. Der Detektor digitalisiert die analogen Radarsignale und unterwirft sie einem statistischen Test, der auf "Ziel und Störung" (Hypothese H_1) oder "Nichtziel" (Hypothese H_2) entscheidet. Es werden nur die Koordinaten derjenigen Signale an den Rechner weitergegeben, die die Hypothese H_1 erfüllen. Die

Wahrscheinlichkeit, mit der ein Zielsignal die Hypothese H_1 erfüllt, wird als Entdeckungswahrscheinlichkeit p_E bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Störsignal die Hypothese H_1 erfüllt und somit dem Rechner als Zielsignal zur Verarbeitung übergeben wird, heißt die Falschmeldewahrscheinlichkeit p_F. Setzt man voraus, daß die Störsignale in einem Bereich des Meßpunktrasters gleichverteilt sind, dann ist p_F die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem Rasterpunkt des Bereiches ein Störsignal auftritt. Der Zusammenhang zwischen Entdeckungswahrscheinlichkeit und Falschmeldewahrscheinlichkeit läßt sich nicht allgemein angeben, da die Störsignale außer dem Empfängerrauschen auch andere Ursachen haben können. Die Funktion $p_E = p_E(p_F)$ ist aber immer eine streng monoton wachsende Funktion ([14], [15]).

Die Verarbeitung der Ausgangssignale des Digitaldetektors strebt eine weitere Trennung von Zielsignalen und Störsignalen an. Die Zielsignale sind im Gegensatz zu den Störsignalen von Antennenumlauf zu Antennenumlauf korreliert. Diese Korrelation wird ausgenutzt, indem der Rechner Signale aus mehreren Antennenumläufen speichert und aus ihnen Flugspuren bildet. Der Spurbildungsprozeß wird als Verfolgen bezeichnet. Es beruht auf den Erwartungsgebieten, die topographische Abgrenzungen für erwartete Signale sind. Bei der Auslegung der Erwartungsgebiete werden die Meßfehler und die möglichen Flugzeugbewegungen berücksichtigt. Ziel der Verfolgung ist es, für Flugzeuge im Radarsichtbereich mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit Spuren (Echtspuren) zu

führen und Spuren, die aus Störsignalen bestehen (Falschspuren) möglichst zu unterdrücken, und somit als weiteres Filter zur Trennung von Zielsignalen und Störsignalen zu wirken. Das Verfolgungsverfahren hat drei Funktionen:

A. Das Aufgreifen:

Zum Aufbau einer neuen Spur werden eine bestimmte Anzahl $h (h \geq 2)$ in aufeinanderfolgenden Radarumläufen eintreffender Signale verlangt. Jedes einlaufende Signal wird daraufhin untersucht, ob es einer bereits bestehenden Spur zugeordnet werden kann. Ist dieses nicht der Fall, dann wird versucht, mit diesem Signal eine neue Spur aufzubauen. Für den nächsten Antennenumlauf wird um das Signal ein kreisförmiges Gebiet ausgelegt (Aufgreiferwartungsgebiet). Dieses Gebiet ist so dimensioniert, daß unter der Voraussetzung, daß das Ausgangssignal ein Zielsignal war, das erwartete Ziel in dem Aufgreiferwartungsgebiet liegt. Die "topographische" Wahrscheinlichkeit p_{top} des Aufgreiferwartungsgebietes ist somit gleich Eins. Fällt ein Signal in das Aufgreiferwartungsgebiet, dann werden beide Signale als möglicher Beginn einer Spur interpretiert. Es wird erneut ein Erwartungsgebiet ausgelegt, das ebenfalls $p_{top} = 1$ genügt, im allgemeinen aber nicht mehr kreisförmig ist. Die Spur wird erst dann akzeptiert, wenn die Aufgreifbedingung erfüllt ist, d.h. h Signale hintereinander aufgetreten sind. Andernfalls wird die Spur abgebrochen.

B. Das Verfolgen

Ist der Aufgreifvorgang abgeschlossen, dann wird für den nächsten Antennenumlauf ein Verfolgungserwartungsgebiet mit $p_{top} = 1$ ausgelegt. Da die erwarteten Zielsignale mit der Wahrscheinlichkeit $1-p_g$ nicht eintreffen, wird im allgemeinen die Spur nicht abgebrochen, wenn das Verfolgungserwartungsgebiet leer bleibt. Es wird dann für den folgenden Antennenumlauf ein Erwartungsgebiet nächsthöherer Stufe ausgelegt, der Ausfaller wird überbrückt. Werden maximal m Ausfaller hintereinander zugelassen, dann treten im Verfolgungssystem $(m+1)^2$ verschiedene Verfolgungserwartungsgebiete auf. Ein Verfolgungserwartungsgebiet vom Typ (i,k) ist mit zwei Signalen ausgelegt worden, die i Antennenumläufe auseinanderliegen für ein Signal, das k Antennenumläufe nach dem zweiten Signal erwartet wird. Fallen mehrere Signale in ein Erwartungsgebiet, dann wird die Spur verzweigt, indem mit jedem Signal eine Spur fortgeführt wird. Ein Spurzweig, der so durch ein Störsignal entsteht, wird als Parasit bezeichnet.

C. Das Abbrechen

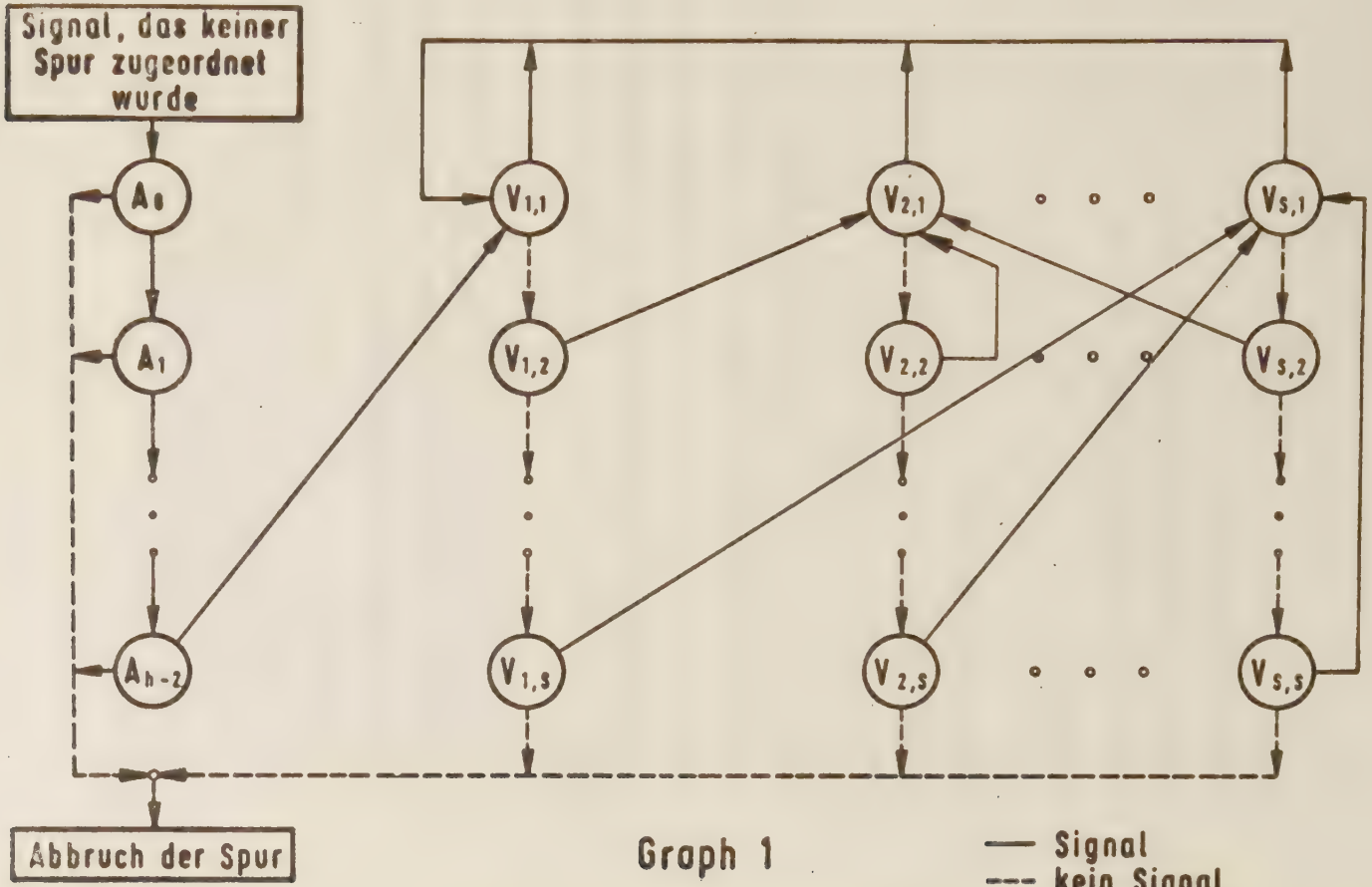
Bleibt ein Erwartungsgebiet vom Typ (i,m+1) leer, dann wird für die Spur kein weiteres Erwartungsgebiet ausgelegt und die Spur wird abgebrochen.

Das Verfolgungsverfahren ist im Graphen I dargestellt. Während des Aufgreifvorganges treten die Erwartungsgebiete $A_0, A_1, \ldots,$ A_{h-2} auf. Das Verfolgungserwartungsgebiet vom Typ (i,k) wird mit $V_{i,k}$ bezeichnet.

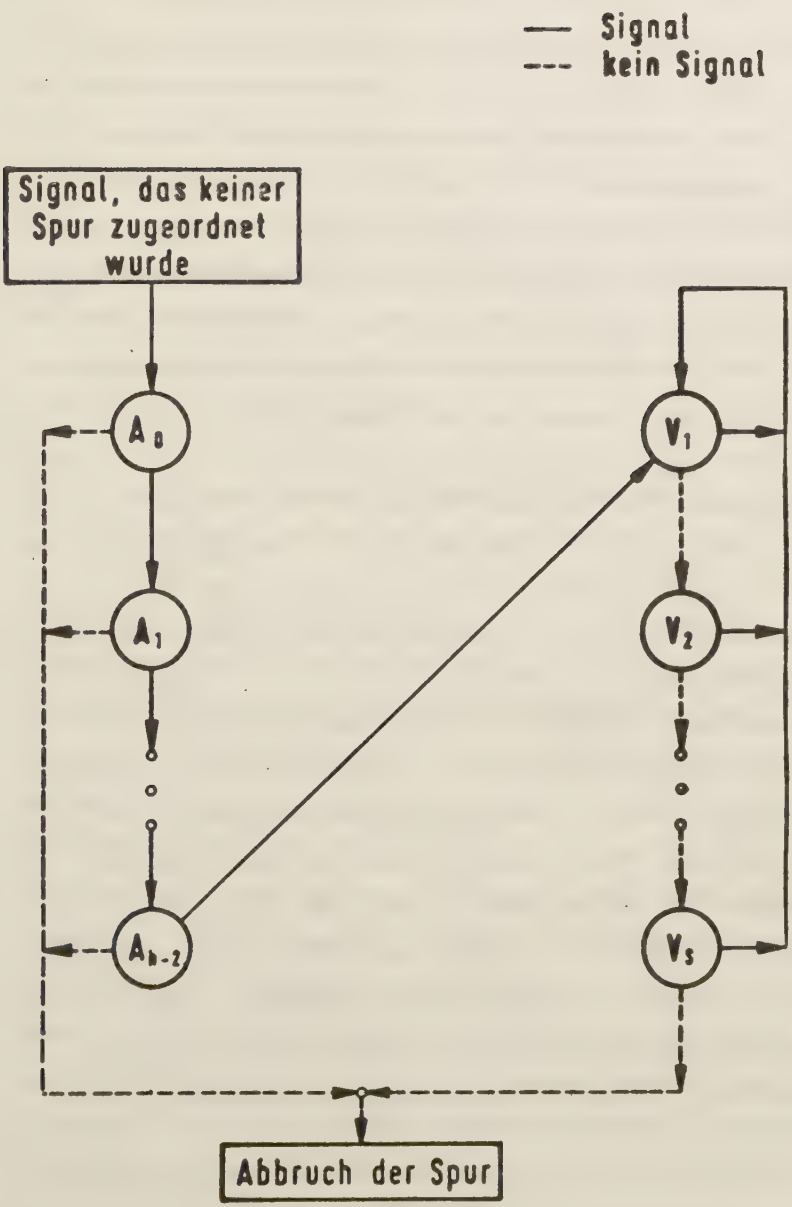
Im Graphen II ist ein vereinfachtes Verfolgungsverfahren dargestellt, bei dem nur Verfolgungserwartungsgebiete vom Typ (1,k) Verwendung finden. Diese Gebiete werden abkürzend mit V_k bezeichnet.

Die Erwartungsgebiete vom Typ (i,1) mit $i > 1$ heißen Rückstufungserwartungsgebiete und die vom Typ (i,k) mit $k > 1$ Überbrückungserwartungsgebiete.

Es wird gesetzt: $s = m+1$. Die Zahl s bezeichnet die maximale Stufenzahl im Verfolgungssystem.


Signal, das keiner Spur zugeordnet wurde
A0
A1
Ah-2
V1,1
V1,2
V1,s
V2,1
V2,2
V2,s
Vs,1
Vs,2
Vs,s
Abbruch der Spur
Signal
kein Signal

Graph 1


Signal
kein Signal
Signal, das keiner Spur zugeordnet wurde
A_0
A_1
A_{h-2}
V_1
V_2
V_s
Abbruch der Spur

Graph 2

Um eine größere Sicherheit in der Echtspurführung und eine stärkere Unterdrückung von Falschspuren zu erreichen, werden beim Multi-Radar-Verfahren mehrere Verfolgungsprozesse zusammengefaßt. Während beim Mono-Radar-Verfahren die Korrelation der Zielsignale von Antennenumlauf zu Antennenumlauf ausgenutzt wird, nutzt das Multi-Radar-Verfahren die Korrelation der Echtspuren aus verschiedenen Verfolgungsprozessen in den Bereichen mehrfacher Überdeckung von Radarsichtbereichen aus. Die Falschspurbildung in den einzelnen Verfolgungsprozessen verläuft dagegen weitgehend unkorreliert.

In Bereichen mehrfacher Überdeckung der Radarsichtbereiche können mehrere Mono-Radarprogramme für ein Flugobjekt eine Spur führen. Die Aufgabe des Zentralprogramms besteht im wesentlichen darin, diese Flugspuren als Darstellungen desselben Flugobjektes zu erkennen und sie zu einer Gesamtspur zu verknüpfen. Der Aufgreifvorgang der Spuren verläuft ganz in den Mono-Radarprogrammen. Geht eine Spur in den Verfolgungszustand über, dann wird sie dem Zentralprogramm gemeldet. Das Zentralprogramm transformiert die gemeldeten Signale auf ein gemeinsames Koordinatensystem und sucht nach bereits bekannten verknüpfbaren Spuren. Die Verknüpfung der Einzelspuren zu Gesamtspuren beruht auf einem paarweisen Vergleich von Einzelspuren. Entscheidet das Vergleichsverfahren, daß zwei Einzelspuren aus verschiedenen Mono-Radarprogrammen dasselbe

Flugobjekt darstellen, dann heißen die Einzelspuren Partner. Die Partnerschaftskriterien sind im wesentlichen die Übereinstimmung der Positionsangaben und der Flugrichtung innerhalb gewisser Toleranzen. Eine Gesamtspur besteht im allgemeinen aus mehr als zwei Einzelspuren, so daß das Verknüpfungskriterium nicht identisch ist mit dem Partnerschaftskriterium. Es lassen sich mehrere Verknüpfungskriterien formulieren. Sie unterscheiden sich durch die Anzahl von Partnerschaften, die von allen möglichen Partnerschaften innerhalb einer Gesamtspur erfüllt sein müssen. Tritt in einer Einzelspur eine Verzweigung auf, dann wird für alle Zweige eine Gesamtspur mit verknüpfbaren Einzelspuren aufgebaut.

Auf Grund der notwendigen Toleranzen bei der Partnerschaftsprüfung können Falschverknüpfungen auftreten. Jedes Signal, das im Mono-Radarprogramm einer Einzelspur zugeordnet wird, wird umgehend dem Zentralprogramm gemeldet. Dort wird die Verknüpfung innerhalb der entsprechenden Gesamtspur überprüft und gegebenenfalls aufgehoben. Beim Aufheben der Verknüpfung wird die Einzelspur, zu der das gemeldete Signal gehört ("aktuelle" Einzelspur) aus der Gesamtspur herausgelöst und dafür nach anderen passenden Gesamtspuren gesucht. Dadurch stellen sich richtige Verknüpfungen, die zeitweilig aufgehoben worden waren, nach einer gewissen Zeit wieder her. Die Einzelspuren in einer Gesamtspur können Informationen austauschen. Wenn in einer Einzelspur ein Ausfaller auftritt, dann kann von einer verknüpften Einzelspur eine Richtung übernommen werden und zur Auslegung des nächsten Erwartungsgebietes herangezogen werden.

In dem gesamten Beobachtungssystem gibt es eine Vielzahl von Parametern und von verschiedenen Strategien, deren Einfluß auf den Spurbildungsprozeß nicht ohne weiteres zu übersehen ist. So lassen sich bei dem Multi-Radar-Verfahren verschiedene Strategien anwenden, die die Falschspuren reduzieren, die aber auch immer eine Reduktion der Echtspuren bewirken. So kann z.B. von einer Gesamtspur gefordert werden, daß sie aus einer bestimmten Mindestanzahl von verknüpften Einzelspuren besteht. Ein weiteres Verfahren besteht darin, den Aufgreifvorgang für Gesamtspuren zu erschweren, indem verlangt wird, daß beim Entstehen einer neuen Gesamtspur eine bestimmte Mindestanzahl von verknüpften Einzelspuren vorhanden sein muß. Die Gesamtspur wird dann solange fortgeführt, wie sie von mindestens einer Einzelspur getragen wird. Findet zwischen den Einzelspuren ein Informationsaustausch statt, dann existieren bei diesem Verfahren die Einzelspuren solange wie die Gesamtspur.

Im Hinblick darauf, ein genaues und störungsfreies Luftlagebild zu erhalten, ist es notwendig , den Einfluß von Betriebsparametern und Strategien im Beobachtungssystem zu erfassen. Somit entsteht die Notwendigkeit, den Verfolgungsprozeß mathematisch zu beschreiben.

Die wichtigsten Betriebsparameter sind p_E, p_F, h, s und der Überdeckungsgrad g. Der Verfolgungsprozeß läßt sich in den Echtspurprozeß und den Falschspurprozeß aufteilen. Beide Prozesse beeinflussen sich gegenseitig. Der gegenseitige Einfluß beim Mono-Radar-Verfahren ist in [7] untersucht worden. Bei der Beschrei-

bung des Multi-Radar-Verfahrens ist die Berücksichtigung aller gegenseitigen Einflüsse äußerst kompliziert. Da man beim Multi-Radar-Verfahren nicht mit sehr hohen Stördichten zu rechnen braucht, genügt es, den gegenseitigen Einfluß von Echtspuren und Falschspuren für folgende Fälle zu berücksichtigen. Liegt für ein Zielsignal kein Erwartungsgebiet vor ("nicht erwartete echte Meldung") und fällt dieses Signal auch in kein zu einer anderen Spur gehöriges Erwartungsgebiet, dann beginnt mit diesem Signal der Aufgreifvorgang für eine Echtspur. Fällt das Zielsignal jedoch in ein Erwartungsgebiet, das zu einer Falschspur gehört, dann wird es für die Falschspur verbraucht und der Aufgreifvorgang für die Echtspur wird somit verhindert. Der Falschspurprozeß verzögert so die Entstehung von Echtspuren. Fallen Störsignale in echte Erwartungsgebiete, dann geben sie Anlaß zu Parasiten. Insbesondere kann der Fall eintreten, daß ein erwartetes Zielsignal ausfällt und statt dessen ein Störsignal der Spur zugeordnet wird. Die Spur wird dann ausgelenkt,d.h., das nächste Erwartungsgebiet wird so ausgelegt, daß das neue erwartete Zielsignal nicht mehr mit der Wahrscheinlichkeit Eins in das Erwartungsgebiet hineinfällt. Findet beim Multi-Radar-Verfahren ein Informationsaustausch zwischen Einzelspuren statt, dann können sich die Spuren durch Übernahme falscher Richtungen gegenseitig auslenken. Weiterhin bewirken die Störungen eine Aufhebung von richtigen Verknüpfungen, so daß der Informationsaustausch zwischen Einzelspuren verhindert wird.

Das Eintreffen der Eingangssignale für die Mono-Radar-Programme ist ein zufälliger Prozeß, der durch die Entdeckungswahrscheinlichkeit, Falschmeldewahrscheinlichkeit und die Verteilung der

Signale über dem Meßpunktraster gegeben ist. Auf diesem Prozeß baut sich der Verfolgungsprozeß auf, der somit auch wieder ein zufälliger Prozeß ist. Fixiert man zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 den Zustand eines Einzelluftlagebildes in einem Mono-Radar-Programm, so führt das Programm ein Abbild des Radarsichtbereiches mit einer bestimmten Spurbelegung. Jede Spur wird durch ein Erwartungsgebiet dargestellt. Die Erwartungsgebiete können sich überlappen. Während des folgenden Antennenumlaufes werden Signale im Meßpunktraster eingestreut. Die Signale werden Spuren zugeordnet und mit Signalen, die keiner Spur zuordenbar sind werden Aufgreiferwartungsgebiete ausgelegt. Danach werden für den nächsten Antennenumlauf neue Erwartungsgebiete in Abhängigkeit vom Trefferzustand und Typ der aktuellen Erwartungsgebiete erzeugt. Die Belegung des Radarsichtbereiches mit Spuren im neuen Antennenumlauf hängt also von dem Zustand im vorhergehenden Antennenumlauf ab. Der Verfolgungsprozeß beim Mono-Radar-Verfahren ist somit ein Markoffscher Prozeß. In [7] ist dieser Prozeß beschrieben und formuliert worden. Die zufälligen Veränderlichen dieses Prozesses sind die Anzahl der pro Antennenumlauf vorhandenen Falschspuren und wenn eine bestimmte Anzahl von Flugzielen im Radarsichtbereich vorgegeben wird, die Anzahl der geführten Echtspuren.

Die Aufgabe der vorliegenden Arbeit ist es, das Multi-Radar-Verfahren als Markoffschen Prozeß zu formulieren. Eine globale Formulierung erfordert Annahmen über eine bestimmte Konfiguration der Radargeräte und ihrer Antennenumlaufzeiten. Es wird daher

ein bestimmter Bereich g-facher Überdeckung betrachtet. Da bei nicht zu hohen Stördichten der Einfluß des Informationsaustausches auf die Falschspurbildung vernachlässigt werden kann, kann die Formulierung des Falschspurprozesses für das Mono-Radar-Verfahren übernommen werden. Die Filterwirkung des Multi-Radar-Verfahrens, die dadurch erreicht wird, daß bestimmte Bedingungen an die Verknüpfungszustände in einer Gesamtspur gestellt werden, wird nicht betrachtet, da hierzu wieder spezielle Annahmen erforderlich sind. Somit lautet die Aufgabe, den Echtspurprozeß im Multi-Radar-Verfahren zu beschreiben.

Zunächst wird der ungestörte Echtspurprozeß betrachtet. Setzt man voraus, daß Echtspuren sich nicht gegenseitig beeinflussen, dann kann man sich auf die Betrachtung einer Echtspur beschränken. Eine Einzelspur im Mono-Radar-Verfahren wird in jedem Antennenumlauf durch einen bestimmten Erwartungsgebietstyp dargestellt. Werden die möglichen Erwartungsgebietstypen und damit bestimmte Spurzustände als Zustände in einer Markoffschen Kette interpretiert, dann läßt sich eine Einzelspur durch eine Markoffsche Kette beschreiben. Die Übergangswahrscheinlichkeiten in der Kette werden definiert durch die Entdeckungswahrscheinlichkeit p_E und das Verfolgungsverfahren (Graphen I,II). Für die Gesamtspur wird aus den Einzelketten eine Kette aufgebaut, die als Produktkette bezeichnet werden soll. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden. Findet zwischen den Einzelspuren kein Informationsaustausch statt, dann besteht die Gesamtkette aus unabhängigen Einzelketten. Die Übergangswahrscheinlichkeiten und Zustandswahrscheinlichkeiten ergeben sich als Produkte der Wahrscheinlichkeiten in den Einzelketten. Findet ein

Informationsaustausch statt, dann sind die Einzelketten nicht mehr unabhängig. Die Übergänge in jeder Einzelkette hängen von den Zuständen ab, die in den übrigen Einzelketten vorliegen. Führt man jedoch eine neue Zustandsdefinition ein, indem die Erwartungsgebiete nach ihren möglichen Trefferzuständen klassifiziert werden, dann erhält man ebenfalls eine Darstellung der Übergangswahrscheinlichkeiten in der Produktkette als Produkte von Einzelübergangswahrscheinlichkeiten.

Zur Beschreibung von gestörten Echtspuren ist das verhinderte Aufgreifen und das Auslenken von Echtspuren zu berücksichtigen. Unter einigen Voraussetzungen läßt sich die Wahrscheinlichkeit für verhindertes Aufgreifen aus dem reinen Falschspurprozeß gewinnen. Es wird dann eine Echtspur dem Falschspurprozeß überlagert und die Echtspur durch eine Markoffsche Kette beschrieben. Der Einfluß der Auslenkung von Echtspuren durch Störsignale wird durch einige Annahmen definiert.

Im Hinblick auf eine sichere Spurführung ist es wünschenswert, für Echtspuren eine große mittlere Spurlänge zu erreichen. Es wird ein Verfahren angegeben, aus der Markoffschen Kette die mittlere Spurlänge und die mittlere Ausfallzeit zu berechnen. Im Anhang werden dann für bestimmte Betriebsparametereinstellungen einige Ergebnisse dargestellt.

2. Markoffsche Ketten

In diesem Kapitel werden die benötigten Definitionen und Sätze aus der Theorie der Markoffschen Ketten zusammengestellt.

Man betrachtet eine Folge von Versuchen. Als Ergebnis jeden Versuches möge genau ein Ereignis aus einer endlichen Ereignismenge auftreten. Die Ereignisse werden künftig als Zustände bezeichnet. Die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, daß beim (t+1)-ten Versuch der Zustand Z_k eintritt, wenn beim t -ten Versuch der Zustand Z_i vorlag, wird mit $p_{ik}(t)$ bezeichnet.

Definition 2.1.

Es sei Z eine endliche Menge von Zuständen

$$Z = \left\{ Z_i \;/\; i = 1,\ldots,n \right\}$$

Es bezeichne N die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen und es sei für jedes $t \in N$ eine nxn-Matrix $M(t) = p_{ik}(t)$ gegeben mit der Normierungseigenschaft

$$\sum_{k=1}^{n} p_{ik}(t) = 1 \quad \text{für} \quad t \in N; \quad i = 1,\ldots,n$$

Dann heißt die Menge

$$K = \left\{ Z;\, M(t) \;/\; t \in N \right\}$$

eine Markoffsche Kette erster Ordnung (MK). Die $t \in N$ heißen Takte. Das Matrixelement $p_{ik}(t)$ heißt Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand Z_i auf den Zustand Z_k beim Übergang vom Takt t auf den Takt t+1.

Sind die Übergangsmatrizen nicht mehr vom Takt abhängig, dann heißt K eine homogene Markoffsche Kette (HMK) und es wird geschrieben

$$K = \{Z, M\}$$

Es sei für den Takt $t = 0$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(0) = (p_1(0), \ldots, p_n(0))$ über Z gegeben. Die Übergangsmatrizen M(t) definieren dann für jeden Takt t eine Wahrscheinlichkeitsverteilung p(t) über Z

$$p(t) := M^T(t-1) \cdot p(t-1)$$

M^T bezeichnet die Transponierte von M. Die Wahrscheinlichkeit $p_i(t)$ heißt Zustandswahrscheinlichkeit von Z_i im Takt t.

Definition 2.2.

Eine homogene Markoffsche Kette heißt ergodisch, wenn die Zustandswahrscheinlichkeiten $p_i(t)$ unabhängig von der Anfangsverteilung p(0) gegen ein und dieselbe Grenzverteilung konvergieren:

$$\lim_{t \to \infty} p_i(t) = q_i$$

q_i heißt Grenzwahrscheinlichkeit für Z_i.

Werden die Grenzwahrscheinlichkeiten nach endlich vielen Takten in einem Takt t_o angenommen, dann heißt K für $t \geq t_o$ stationär.

Es seien zwei Takte t_o und t_o+m gegeben. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Zustand Z_i aus dem Takt t_o in den Zustand Z_k im Takt t_o+m übergeht, wird mit $p_{ik}(m)$ bezeichnet. Es gilt die Markoffsche Gleichung:

$$p_{ik}(m) = \sum_{l=1}^{n} p_{il}(r) \cdot p_{lk}(m-r) \qquad \text{für } 0 < r < m$$

Es gilt der folgende Satz [2].

Satz 2.1.

Eine homogene Markoffsche Kette K = (Z,M) ist genau dann ergodisch, wenn die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ik}(m)$ unabhängig von i konvergieren

$$\lim_{m \to \infty} p_{ik}(m) = g_k$$

Es gilt dann: $g_k = q_k$.

Definition 2.3.

Es sei eine homogene Markoffsche Kette K = (Z,M) gegeben. Ein Zustand $Z_i \in Z$ heißt wesentlich, wenn zu jedem natürlichen m und zu jedem Zustand $Z_k \in Z$ mit $p_{ik}(m) > 0$ eine natürliche Zahl r existiert, so daß $p_{ki}(r) > 0$.

Ein Zustand $Z_i \in Z$ heißt vorübergehend, wenn es einen Zustand $Z_k \in Z$ und eine natürliche Zahl m gibt derart, daß $p_{ik}(m) > 0$ und $p_{ki}(r) = 0$ für r = 1,2,3,... .

Ein wesentlicher Zustand $Z_i \in Z$ heißt periodisch, wenn es eine natürliche Zahl d > 1 gibt, so daß für alle durch d nicht teilbaren n die Beziehung $p_{ii}(n) = 0$ erfüllt ist.

Über Z wird eine Relation definiert. Ein Zustand $Z_i \in Z$ heißt mit einem Zustand $Z_k \in Z$ verbunden, wenn es eine natürliche Zahl r gibt, so daß gilt:

$$p_{ik}(r) > 0 \quad .$$

Das Verbundensein ist eine Äquivalenzrelation über der Menge der wesentlichen Zustände von Z, so daß diese Menge in disjunkte Klassen miteinander verbundener Zustände zerfällt. Es gilt der folgende Satz [2].

Satz 2.2.

Eine homogene Markoffsche Kette ist ergodisch, wenn alle wesentlichen Zustände nichtperiodisch sind und bezüglich des Verbundenseins eine einzige Klasse bilden.

Es sei eine Markoffsche Kette K = (Z,M) gegeben und eine Zerlegung der Zustandsmenge in r disjunkte Teilmengen

$$Z = \bigcup_{i=1}^{r} \widetilde{Z}_i \qquad \widetilde{Z}_i \cap \widetilde{Z}_k = \emptyset \quad \text{für } i,k = 1,\dots,r;\ i \neq k$$

Auf der Menge

$$\widetilde{Z} = \left\{ \widetilde{Z}_1, \dots, \widetilde{Z}_r \right\}$$

wird eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\widetilde{p}$ definiert

$$p(\widetilde{Z}_k) =: \widetilde{p}_k = \sum_{Z_i \in \widetilde{Z}_k} p_i =: \sum_{i}^{k} p_i$$

Für jeden Takt t wird eine Übergangsmatrix $\widetilde{M}(t)$ definiert

$$\widetilde{p}_{ik}(t) := \frac{1}{\widetilde{p}_i} \sum_{m}^{i} \sum_{n}^{k} p_m(t) \cdot p_{mn}(t)$$

Somit ist bezüglich der gegebenen Zerlegung von Z eine Kette $\widetilde{K} = \left\{ \widetilde{Z};\ \widetilde{M}(t) \ /\ t \in N \right\}$ konstruiert worden. $\widetilde{K}$ heißt eine abgeleitete Kette von K.

3. Mittlere Zustandszeiten in Markoffschen Ketten

Die Wirkungsweise von Betriebsparametern und Verfolgungsstrategien auf die Echtspurbildung wird dadurch gekennzeichnet, daß die Abhängigkeit der mittleren Spurlänge und der mittleren Ausfalldauer von den Parametern und Strategien angegeben wird. Es wird ein Verfahren formuliert, bei gegebener Markoffscher Kette für jede Teilmenge der Zustandsmenge die mittlere Lebensdauer in Takten zu berechnen. Die mittlere Lebensdauer der Komplementärmenge heißt mittlere Ausfalldauer der Ausgangsmenge.

Gegeben sei eine homogene Markoffsche Kette

$$K = (Z,M)$$

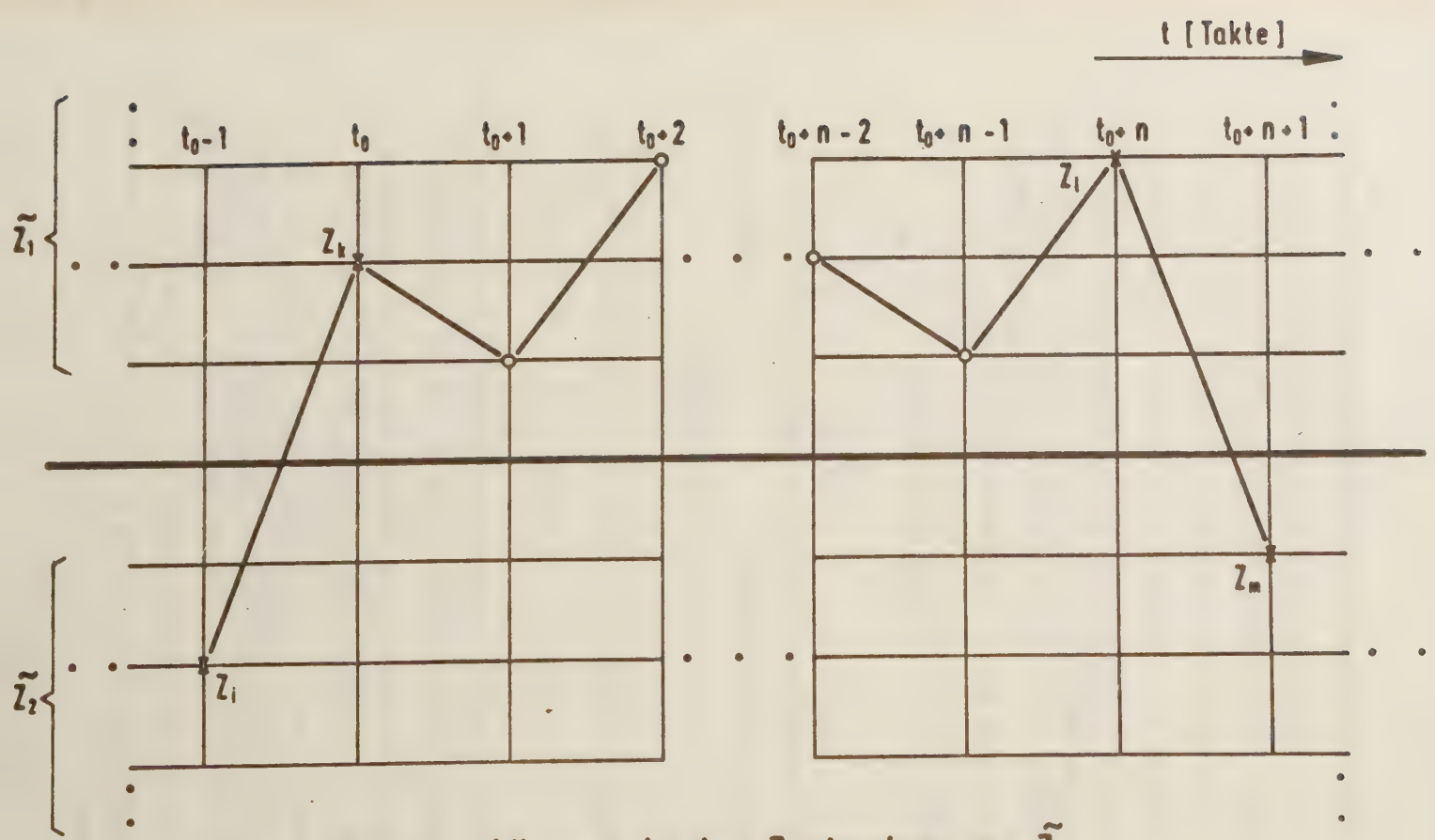
und eine Teilmenge $\widetilde{Z}_1 \subset Z$. Die Zustandsmenge Z wird in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt

$$\widetilde{Z}_2 := Z - \widetilde{Z}_1; \quad \widetilde{Z} := \{ \widetilde{Z}_1, \widetilde{Z}_2 \} .$$

Bezüglich dieser Zerlegung wird die abgeleitete Kette $\widetilde{K}$ gebildet:

$$\widetilde{K} = (\widetilde{Z},\widetilde{M}) \quad .$$

In einem Takt t_o-1 liege die Zustandsmenge $\widetilde{Z}_2$ vor und im folgenden Takt t_o die Zustandsmenge $\widetilde{Z}_1$. Es wird gefragt nach der mittleren Anzahl von Takten, die die Zustandsmenge $\widetilde{Z}_1$ hintereinander auftritt. Beim Übergang von t_o-1 auf t_o geht ein Zustand $Z_i \in \widetilde{Z}_2$ über in einen Zustand $Z_k \in \widetilde{Z}_1$. Die Kette bleibt dann mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit n weitere Takte in der Zustandsmenge $\widetilde{Z}_1$. Tritt im Takt t_o+n+1 dann wieder $\widetilde{Z}_2$ auf, so ist beim Übergang von t_o+n auf t_o+n+1 ein Zustand $Z_l \in \widetilde{Z}_1$ übergegangen in einen Zustand $Z_m \in \widetilde{Z}_2$. Diesen Vorgang stellt das folgende Bild schematisch dar.



Weg der Länge n in der Zustandsmenge $\tilde{Z}_1$

Man erhält eine zufällige Veränderliche L_1, die vom Takt t_o und der Anfangsbedingung $p(o)$ abhängt, indem man $P(L_1(t_o,p(o)) = n)$ $n = 0,1,2,\ldots$ definiert als Wahrscheinlichkeit dafür, daß $\widetilde{Z}_1$ genau n Takte hintereinander auftritt und der Bedingung, daß im Takt $t_o - 1$ $\widetilde{Z}_2$ und im Takt t_o $\widetilde{Z}_1$ vorlag. Die Veränderliche $L_1(t_o,p(o))$ heißt Lebensdauer von $\widetilde{Z}_1$ bezüglich des Taktes t_o und der Anfangsbedingung $p(o)$. Für $P(L_1(t_o,p(o))$ $= n$ / $\widetilde{Z}_2$ im Takt t_o-1 und $\widetilde{Z}_1$ im Takt t_o) wird abkürzend $L(n)$ geschrieben.

Die Wahrscheinlichkeit $L(n)$ ist bis auf einen Faktor $\frac{1}{N}$ gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Wege, die im Takt t_o-1 in $\widetilde{Z}_2$ beginnen, in den Takten $t_o, t_o+1, \ldots, t_o+n$ in $\widetilde{Z}_1$ verlaufen und im Takt t_o+n+1 in $\widetilde{Z}_2$ enden, multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit des Anfangszustandes im Takt t_o-1:

$$L(n) = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i}^{2} p_i(t_o-1) \cdot \sum_{j_o \cdots j_n}^{1} p_{ij_o} \cdots p_{j_{n-1}} \cdot \sum_{k}^{2} p_{j_n k}$$

Der Faktor wird aus der Bedingung:

$$\sum_{n=o}^{\infty} L(n) = 1$$

berechnet:

$$N = \sum_{n=o}^{\infty} \sum_{i}^{2} p_i \cdot \sum_{j_o \cdots j_n}^{1} p_{ij_o} \cdots p_{j_{n-1} j_n} \cdot \sum_{k}^{2} p_{j_n k}$$

$$= \sum_{i}^{2} p_i \cdot \left[\sum_{j_o}^{1} p_{ij_o} \cdot \sum_{k}^{2} p_{j_o k} + \sum_{j_o j_1}^{1} p_{ij_o}\, p_{j_o j_1} \cdot \sum_{k}^{2} p_{j_1 k} + \cdots \right]$$

$$= \sum_{i}^{2} p_i \cdot \left[\sum_{j_o}^{1} p_{ij_o} \left(1 - \sum_{k}^{1} p_{j_o k}\right) + \sum_{j_o j_1}^{1} p_{ij_o}\, p_{j_o j_1} \left(1 - \sum_{k}^{1} p_{j_1 k}\right) + \cdots \right]$$

$$= \sum_{i}^{2} p_i \cdot \left[\sum_{j_o}^{1} p_{ij_o} \left(1 - \sum_{j_1}^{1} p_{j_o j_1}\right) + \sum_{j_o j_1}^{1} p_{ij_o}\, p_{j_o j_1} \left(1 - \sum_{j_2}^{1} p_{j_1 j_2}\right) + \cdots \right]$$

$$= \sum_{i}^{2} \sum_{j}^{1} p_i \cdot p_{ij}$$

Diese Doppelsumme ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß $\tilde{Z}_2$ in $\tilde{Z}_i$ übergeht.

Somit folgt für L(n):

$$L(n) = \frac{1}{\sum_{r}^{2} \sum_{s}^{1} p_r \cdot p_{rs}} \cdot \sum_{i}^{2} p_i \cdot \sum_{j_o \cdots j_k}^{1} p_{ij_o} \cdots p_{j_{n-1} j_o} \cdot \sum_{k}^{2} p_{j_n k}$$

$$= \frac{\sum_{i}^{2} p_i \cdot \sum_{j_o}^{1} p_{ij_o}}{\sum_{r}^{2} \sum_{s}^{1} p_r \cdot p_{rs}} \cdot \sum_{j_1 \cdots j_n}^{1} p_{j_o j_1} \cdots p_{j_{n-1} j_n} \cdot \sum_{k}^{2} p_{j_n k}$$

Setzt man für j_o den Index j und vertauscht die beiden ersten Summenzeichen oberhalb des Bruchstriches, so erhält man

$$L(n) = \sum_{j}^{1} \frac{\sum_{i}^{2} p_i(t_o-1) \cdot p_{ij}}{\sum_{r}^{2} \sum_{s}^{1} p_r(t_o-1) \cdot p_{rs}} \cdot \sum_{j_1 \cdots j_n}^{1} p_{jj_1} \cdots p_{j_{n-1} j_n} \cdot \sum_{k}^{2} p_{j_n k}$$

(F.3.1.)

Der Quotient unter dem ersten Summenzeichen ist die Wahrscheinlichkeit des Zustandes $Z_j \in \tilde{Z}_1$ unter der Bedingung, daß im Takt t_o-1 $\tilde{Z}_2$ vorliegt und im Takt t_o $\tilde{Z}_1$ auftritt. Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeitsverteilung über Z für alle diejenigen Realisierungen der Kette, bei denen diese Bedingung erfüllt ist mit $c(t)$, so erhält man

$$c_j(t_o) = \frac{\sum_{i}^{2} p_i(t_o-1) \cdot p_{ij}}{\sum_{r}^{2} \sum_{s}^{1} p_r(t_o-1) \cdot p_{rs}} \quad \text{für } Z_j \in \tilde{Z}_1 \qquad (F.3.2.)$$

$$c_j(t_o) = 0 \qquad \text{für } Z_j \in \tilde{Z}_2 \qquad (F.3.3.)$$

Die Formeln für die Verteilung $c(t_o)$ erhält man ebenfalls auf folgendem Wege. Für diejenigen Realisierungen der Kette, bei denen im Takt t_o-1 $\tilde{Z}_2$ vorliegt, lautet die Verteilung für t_o-1:

$$c_i\ (t_o-1) = 0 \qquad \text{für } Z_i \in \tilde{Z}_1$$

$$c_i\ (t_o-1) = \frac{p_i(t_o-1)}{\sum_k^{-2} p_k(t_o-1)} \qquad \text{für } Z_i \in \tilde{Z}_2$$

Wird zusätzlich die Bedingung gestellt, daß im Takt t_o $\tilde{Z}_1$ vorliegt, so ergibt sich für die Verteilung im Takt t_o:

$$c_j(t_o) = 0 \qquad \text{für } Z_j \in \tilde{Z}_2$$

und für die Zustände $Z_j \in \tilde{Z}_1$

$$c_j(t_o) = \frac{\sum_i^{-2} c_i(t_o-1) \cdot p_{ij}}{\sum_s^{-1} \sum_r^{-2} c_r(t_o-1) \cdot p_{rs}}$$

$$= \frac{\left(\sum_i^{-2} p_i(t_o-1) \cdot p_{ij}\right) \cdot \left(\sum_t^{-2} p_t(t_o-1)\right)}{\left(\sum_k^{-2} p_k(t_o-1)\right) \cdot \left(\sum_s^{-1} \sum_r^{-2} p_r(t_o-1) \cdot p_{rs}\right)}$$

Und somit:

$$c_j(t_o) = \frac{\sum_{i}^{2} p_i(t_o-1) \cdot p_{ij}}{\sum_{r}^{2} \sum_{s}^{1} p_r(t_o-1) \cdot p_{rs}} \qquad \text{für } Z_j \in \widetilde{Z}_1$$

Es wird gesetzt:

$$L_j(n) := \sum_{j_1 \cdots j_n}^{1} p_{jj_1} \cdots p_{j_{n-1} j_n} \sum_{k}^{2} p_{j_n k}$$

$L_j(n)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Zustandsmenge $\widetilde{Z}_1$ genau n-mal hintereinander auftritt, wenn im Takt t_o der Zustand Z_j vorliegt. Somit läßt sich L(n) folgendermaßen schreiben:

$$L(n) = \sum_{j}^{1} c_j \cdot L_j(n)$$

Es bezeichne M_1 diejenige Untermatrix von M, die die Zustandsmenge $\widetilde{Z}_1$ in sich überführt und $(M_1)_{lm}$ das Element in der l-ten Zeile und m-ten Spalte. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

$$\sum_{j_1 \cdots j_n}^{1} p_{jj_1} \cdots p_{j_{n-1} j_n} = \sum_{j_n}^{1} (M_1^n)_{jj_n}$$

Und somit:

$$L(n) = \sum_{i}^{1} c_i(t_o) \cdot \sum_{j}^{1} (M_1^n)_{ij} \cdot \sum_{k}^{2} p_{jk}$$

Für den gesuchten Mittelwert von $L_1(t_o, p(o))$ erhält man schließlich:

$$\overline{L_1(t_o, p(o))} = \sum_{n=o}^{\infty} n \cdot \sum_{i}^{1} \sum_{j}^{1} \sum_{k}^{2} c_i(t_o) \cdot (M_1^n)_{ij} \cdot p_{jk}$$

(F.3.4.)

Betrachtet man nur den Gleichgewichtszustand der Kette, für den die Grenzwahrscheinlichkeiten die Zustandswahrscheinlichkeiten hinreichend annähern, dann ist die Lebensdauer vom Takt und der Anfangsbedingung unabhängig.

4. Die Markoffsche Kette für ungestörte Echtspuren

Es wird vorausgesetzt, daß Echtspuren sich nicht gegenseitig beeinflussen und daß keine Störungen auftreten ($p_F = 0$). Dann genügt es, zur Beschreibung der Echtspurprozesse im Mono-Radar-Verfahren eine einzelne Echtspur zu betrachten. Der zufällige Prozeß der Echtspurbildung wird durch die Entdeckungswahrscheinlichkeit p_E, die Betriebsparameter h und s und durch das Verfolgungsverfahren definiert. Auf Grund der obigen Voraussetzungen und der Voraussetzung $p_{top} = 1$ hat die Flächengröße der Erwartungsgebiete keinen Einfluß auf die Spurbildung. Es brauchen also nur Verfolgungserwartungsgebiete vom Typ (1,k) betrachtet zu werden, so daß sich das Verfolgungsverfahren durch den Graphen II darstellen läßt.

Bei der Verknüpfung von zwei Einzelspuren im Multi-Radar-Verfahren wird verlangt, daß beiden Spuren ein Signal zugeordnet wurde. Es wird ein Partnerschaftskriterium vorausgesetzt, das zwei Einzelspuren, die dasselbe Flugobjekt darstellen, mit der Wahrscheinlichkeit Eins verknüpft, wenn in beiden Spuren nur Echtsignale vorliegen.

Zunächst wird für Einzelspuren eine Markoffsche Kette aufgebaut. Die Kette für Gesamtspuren wird dann aus den Einzelketten konstruiert.

4.1. Ungestörte Echtspuren im Mono-Radar-Verfahren

A. Für Echtspuren im Mono-Radar-Verfahren wird eine Zustandsmenge definiert, indem die Spurzustände nach den auftretenden Erwartungsgebietstypen klassifiziert werden. Die An-

zahl der Zustände hängt von den Parametern h und s ab.

Z_1: = kein Erwartungsgebiet

Z_2: = Aufgreiferwartungsgebiet (EG der Stufe 0)

Z_{2+i} = Erwartungsgebiet der Stufe 1 und i-ter Ordnung

$i = 1,\ldots,h-2$

Z_{h+1}: = Verfolgungserwartungsgebiet der Stufe 1

Z_{h+1+i}: = Verfolgungserwartungsgebiet der Stufe i+1

$i = 1,\ldots,s-1$

B. Die Takte t sind durch die Antennenumläufe definiert.

C. Für den Übergang vom Antennenumlauf t auf t+1 ergibt sich folgende Übergangsmatrix p_{ik}:

$p_{1,1} = 1-p_E$; $p_{1,2} = p_E$; sonst $p_{1,k} = 0$.

$p_{2+i,1} = 1-p_E$; $p_{2+i,3+i} = p_E$; sonst $p_{2+i,k} = 0$

$i = 0,\ldots,h-2$

$p_{h+1+i,h+2+i} = 1-p_E$; $p_{h+1+i,h+1} = p_E$; sonst $p_{h+1+i,k} = 0$

$i = 0,\ldots,s-2$

$p_{h+s,1} = 1-p_E$; $p_{h+s,h+1} = p_E$; sonst $p_{h+s,k} = 0$.

Die Matrix ergibt das nachstehende Bild.

t \ $t+1$	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	.....	Z_{h-1}	Z_h	Z_{h+1}	Z_{h+2}	.....	Z_{h+s-1}	Z_{h+s}
Z_1	$1 - p_E$	p_E	0	0		0	0	0	0		0	0
Z_2	$1 - p_E$	0	p_E	0		0	0	0	0		0	0
Z_3	$1 - p_E$	0	0	p_E		0	0	0	0		0	0
Z_4	$1 - p_E$	0	0	0		0	0	0	0		0	0
⋮	|											
Z_{h-1}	$1 - p_E$	0	0	0		0	p_E	0	0		0	0
Z_h	$1 - p_E$	0	0	0		0	0	p_E	0		0	0
Z_{h+1}	0	0	0	0		0	0	p_E	$1 - p_E$		0	0
Z_{h+2}	0	0	0	0		0	0	p_E	0		0	0
⋮	|							|				
Z_{h+s-1}	0	0	0	0		0	0	p_E	0		0	$1 - p_E$
Z_{h+s}	$1 - p_E$	0	0	0		0	0	p_E	0		0	0

Übergangsmatrix für eine ungestörte Einzelspur

Somit ist für jedes Parametertripel (p_E,h,s) eine HMK erster Ordnung

$$K(p_E,h,s) = \Big(Z(p_E,h,s),\ M(p_E,h,s) \Big)$$

konstruiert worden.

Satz 4.1.1.

Die Ketten $K(p_E,h,s)$ sind für $0 \leq p_E \leq 1$, $h \geq 2$ und $s \geq 1$ ergodisch. Insbesondere sind die Ketten für $(h,s) = (2,1)$ stationär und für $(h,s) \neq (2,1)$ nicht stationär. Die Grenzwahrscheinlichkeiten q_i haben die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned}
N \cdot q_1 &= (1-p_E)^s \\
N \cdot q_2 &= p_E \cdot (1-p_E)^s \\
N \cdot q_{2+i} &= p_E^{\,i+1} \cdot (1-p_E)^s && i = 1,\ldots,h-2 \\
N \cdot q_{h+1} &= p_E^{\,h} \\
N \cdot q_{h+1+i} &= p_E^{\,h} \cdot (1-p_E)^i && i = 1,\ldots,s-1
\end{aligned}$$

mit:

$$N(p_E,h,s) = (1-p_E)^s \cdot \sum_{i=0}^{h-1} p_E^{\,i} + p_E^{\,h} \cdot \sum_{i=0}^{s-1} (1-p_E)^i$$

Beweis:

A. Für jeden Zustand Z_i wird ein Hauptweg definiert

$$H(Z_i) = \{ Z_i, Z_{i+1}, \ldots, Z_{h+s}, Z_1, \ldots, Z_{i-1}, Z_i \}$$

Es sei $0 < p_E < 1$. Dann geht jeder Zustand Z_i in jeden Zustand Z_k längs seines Hauptweges $H(Z_i)$ nach maximal s+h Takten mit einer von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit über. Alle Zustände sind also wesentlich und bilden eine einzige Klasse bezüglich des Verbundenseins. Jeder Zustand Z_i geht in sich

selbst nach s+h Takten längs seines Hauptweges mit einer von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit über. In diesem Hauptweg erscheint einmal der Zustand Z_1. Erzeugt man jetzt weitere Wege für jedes l = 1,2,3,... indem der Zustand Z_1 l-mal hintereinander auftritt, so geht längs dieser Wege und somit für alle Takte t = s+h+l der Zustand Z_i in sich selbst mit einer von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit über. Somit ist jeder Zustand nichtperiodisch. Die Ergodizität der Kette für $0 < p_E < 1$ folgt dann aus Satz 2.2.. Ist $p_E = 0$ oder $p_E = 1$, dann sind nur die Zustände Z_1 bzw. Z_{h+1} wesentlich. Alle anderen Zustände sind vorübergehend.

B. Die Grenzwahrscheinlichkeiten q_i ergeben sich somit als Lösun des folgenden Gleichungssystems

$$M^T \cdot q = q \qquad GS(h,s)$$

$$\sum_{i=1}^{h+s} q_i = 1$$

D.1. Es wird der Fall (h,s) = (2,1) betrachtet. Die Übergangsmatrix $M(p_E,2,1)$ hat folgende Gestalt:

t \ t+1	Z_1	Z_2	Z_3
Z_1	$1-p_E$	p_E	0
Z_2	$1-p_E$	0	p_E
Z_3	$1-p_E$	0	p_E

Das Gleichungssaystem GS(2,1) hat folgende Gestalt

$$q_1 = (1-p_E)$$
$$q_2 = p_E \cdot q_1$$
$$q_3 = p_E \cdot (q_2+q_3)$$

Die Lösungen lauten

$$q_1 = 1-p_E$$
$$q_2 = p_E(1-p_E)$$
$$q_3 = p_E^2$$

und haben somit die angegebene Form. Es sei eine beliebige Anfangsverteilung $p_1(0)$, $p_2(0)$, $p_3(0)$ gegeben. Durch Anwendung der Übergangsmatrix erhält man:

$$p_1(1) = (1-p_E)\ (p_1(0) + p_2(0) + p_3(0)) = 1-p_E$$
$$p_2(1) = p_E \cdot p_1(0)$$
$$p_3(1) = p_E\ (p_2(0) + p_3(0)) = p_E(1-p_1(0)).$$

Und für den Takt 2:

$$p_1(2) = 1-p_E$$
$$p_2(1) = p_E \cdot (1-p_E)$$
$$p_3(2) = p_E(1-p_1(1)) = p_E^2$$

Die Kette ist also vom Takt 2 an stationär.

B.2. Für allgemeines (h,s) lautet das Gleichungssystem GS(h,s)

$$q_1 = (1-p_E)\ (q_1+\ldots+ q_h+q_{h+s}) \qquad (G1)$$

$$q_{2+i} = p_E \cdot q_{1+i} \qquad i = 0,\ldots,h-2 \qquad (G2)$$

$$q_{h+1} = p_E\ (q_h+\ldots+q_{h+s}) \qquad (G3)$$

$$q_{h+1+i} = (1-p_E)\ q_{h+i} \qquad i = 1,\ldots,s-1 \qquad (G4)$$

Wie man unmittelbar sieht, erfüllen die angegebenen Lösungen die Gleichungen G2 und G4. Für G1 und G3 erhält man durch Einsetzen:

a) $N \cdot (1-p_E)\ (q_1+\ldots+q_h+q_{h+s})$

$= \Big((1-p_E)\Big(p_E(1-p_E)^s +\ldots+p_E^{h-1}\ (1-p_E)^s+p_E^h\ (1-p_E)^{s-1}+(1-p_E)^s\Big)\Big)$

$= (1-p_E)^s\ (p_E-p_E^2+\ldots+p_E^{h-1}\ -p_E^h+p_E^h+1-p_E) = (1-p_E)^s$

$= N \cdot q_1$

b) $N \cdot p_E \cdot (q_h+\ldots+q_{h+s})$

$= p_E\Big(p_E^{h-1}(1-p_E)^s + p_E^h + p_E^h\ (1-p_E)+\ldots+p_E^h(1-p_E)^{s-1}\Big)$

$= p_E^h\Big(p_E+p_E\ (1-p_E)+\ldots+p_E(1-p_E)^{s-1}+(1-p_E)^s\Big) = p_E^h$

$= N \cdot q_{h+1}$

Aus der Bedingung $\sum_{i=1}^{h+s} q_i = 1$ folgt :

$$N = (1-p_E)^s \cdot \sum_{i=0}^{h-1} p_E^{\,i} + p_E^{\,h} \sum_{i=0}^{s-1} (1-p_E)^i$$

Da die Ketten ergodisch sind, sind die Lösungen eindeutig bestimmt. Für $(h,s) \neq (2,1)$ sind die Grenzwahrscheinlichkeiten echt gebrochen rationale Ausdrücke in p_E und $(1-p_E)$. Durch endliche Iteration mit der Übergangsmatrix erhält man ganz rationale Ausdrücke in p_E und $(1-p_E)$. Die Grenzwahrscheinlichkeiten werden also nicht nach endlich vielen Takten angenommen, d.h. für $(h,s) \neq (2,1)$ sind die Ketten nicht stationär.

4.2. Ungestörte Echtspuren ohne Informationsaustausch im Multi-Radar-Verfahren

Es wird eine ungestörte Echtspur in einem Bereich g-facher Überdeckung betrachtet. Da innerhalb einer Gesamtspur kein Informationsaustausch stattfindet, baut sich die Kette für die Gesamtspur aus unabhängigen Einzelketten auf.

A. Die Einzelspuren werden mit $1,\ldots,g$ numeriert. Die Zustansmengen der Einzelspuren werden mit $Z^{(1)},\ldots,Z^{(g)}$ bezeichnet. Die Zustandsmenge Z für die Gesamtspur wird als das cartesische Produkt der Einzelzustandsmengen definiert

$$\overline{Z} = Z^{(1)} \times \ldots \times Z^{(g)}$$

B. Die Zeitpunkte, in denen die Einzelspuren aktuell werden, werden als Takte definiert. Das nach rechts offene Zeitintervall bis zum Aktuellwerden der nächsten Einzelspur ist die zugehörige Taktzeit.

C. Im Takt t+1 werde die l-te Einzelspur aktuell. Beim Übergang von t auf t+1 geht ein Zustand $Z_{i_l} \in Z^{(l)}$ in einem Zustand $Z_{k_l} \in Z^{(l)}$ mit einer Wahrscheinlichkeit $p_{i_l k_l}$ über. Da die Übergänge in den Einzelspuren unabhängig sind, ergeben sich die Übergangswahrscheinlichkeiten in der Gesamtkette als Produkte der Einzel-

übergangswahrscheinlichkeiten. Für den Übergang von t auf t+1 lautet somit die Übergangswahrscheinlichkeit vom Zustand $(Z_{i_1},\ldots,Z_{i_g})$ in den Zustand $(Z_{k_1},\ldots,Z_{k_g})$:

$$p_{i_1\ldots i_g,k_1\ldots k_g} = p_{i_1k_1} \cdot \prod_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{g} \delta_{i_jk_j} \qquad \text{(F.4.2.1.)}$$

Es wird folgende Voraussetzung getroffen, um eine definierte Taktfolge zu erhalten:

Voraussetzung 4.2.1.: Die zeitliche Reihenfolge, in der die Einzelspuren aktuell werden, bleibt erhalten.

Unter dieser Voraussetzung erhält man für den Übergang von einem Takt t auf einen Takt t+g:

$$p_{i_1\ldots i_g,k_1\ldots k_g}(g) = \prod_{l=1}^{g} p_{i_lk_l} \qquad \text{(F.4.2.2.)}$$

Somit ist für die Gesamtspuren zu jeder Parametereinstellung

$\left(p_{E_l}^{(1)(1)},h,s,g\right)$, $l=1,\ldots,g$ eine Markoffsche Kette

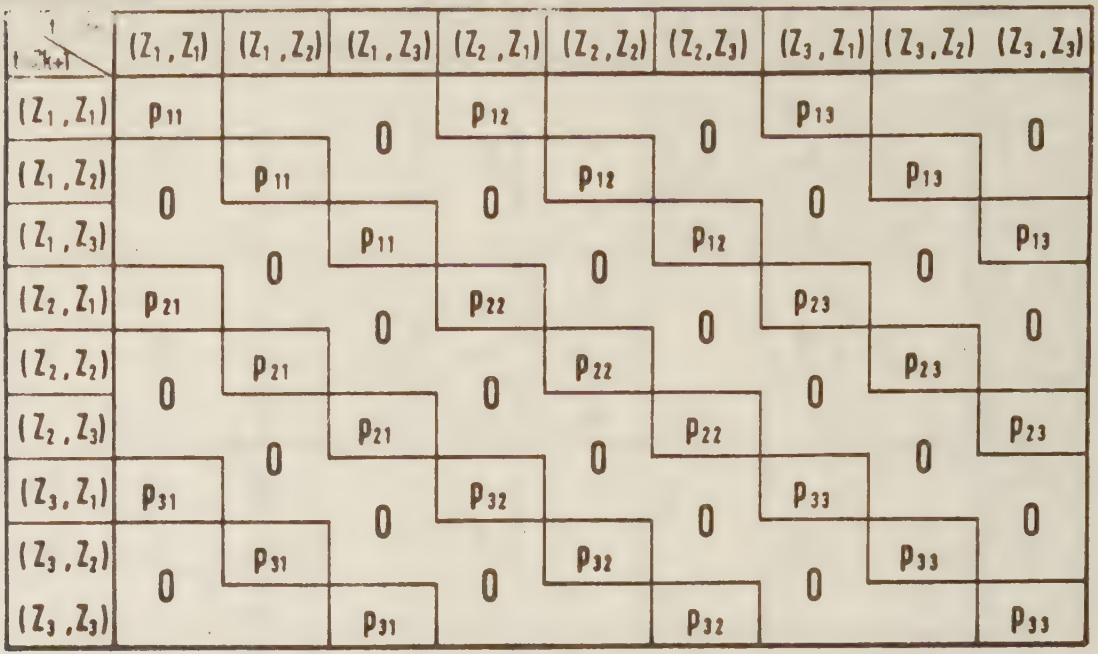
$$\bar{K} = \left\{\bar{Z};\bar{M}(0),\ldots,\bar{M}(g-1)\right\}$$

konstruiert worden. Die Matrix $\bar{M}(1)$ ist die Übergangsmatrix vom Takt $t = k\cdot g+1$ auf den Takt $t+1$ $(k = 0,1,2,\ldots,\ l = 0,\ldots,g-1)$.

In den folgenden zwei Tabellen sind die zwei Übergangsmatrizen für die Parameterwerte $h^{(1)} = h^{(2)} = 2$, $s^{(1)} = s^{(2)} = 1$ und $g = 2$ dargestellt.

$t=2k$ \ $t'=2k+1$	(Z_1,Z_1)	(Z_1,Z_2)	(Z_1,Z_3)	(Z_2,Z_1)	(Z_2,Z_2)	(Z_2,Z_3)	(Z_3,Z_1)	(Z_3,Z_2)	(Z_3,Z_3)
(Z_1,Z_1)	p_{11}	p_{12}	p_{13}	0			0		
(Z_1,Z_2)	p_{21}	p_{22}	p_{23}						
(Z_1,Z_3)	p_{31}	p_{32}	p_{33}						
(Z_2,Z_1)	0			p_{11}	p_{12}	p_{13}	0		
(Z_2,Z_2)				p_{21}	p_{22}	p_{23}			
(Z_2,Z_3)				p_{31}	p_{32}	p_{33}			
(Z_3,Z_1)	0			0			p_{11}	p_{12}	p_{13}
(Z_3,Z_2)							p_{21}	p_{22}	p_{23}
(Z_3,Z_3)							p_{31}	p_{32}	p_{33}

Übergangsmatrix M(0) für eine ungestörte Echtspur von einem Takt $t=2k$ auf $t'=2k+1$ ($h=2, s=1, g=2$)



Übergangsmatrix $\overline{M}(1)$ für eine ungestörte Echtspur von einem Takt $t = 2k+1$ auf $t' = 2k+2$

$(h = 2, s = 1, g = 2)$

Die Zustandswahrscheinlichkeiten und Grenzwahrscheinlichkeiten ergeben sich als Produkte der Einzelwahrscheinlichkeiten. Auf Grund der Unabhängigkeit der Einzelketten gilt das auch, wenn die Voraussetzung 4.2.1. fallengelassen wird.

Da der Aufgreifprozess ganz im Monoradarprogramm verläuft und eine Einzelspur dem Zentralprogramm erst dann gemeldet wird, wenn der Aufgreifvorgang abgeschlossen ist, treten bestimmte Spurzustände im Zentralprogramm nicht auf. In der Zustandsmenge Z wird diejenige Teilmenge definiert, die im Zentralprogramm geführt wird. Es wird ein Verfahren betrachtet, bei dem eine neu aufgegriffene Spur genau in demjenigen Takt dem Zentralprogramm gemeldet wird, in dem zum erstenmal ein Verfolgungserwartungsgebiet für die Spur vorliegt. Für alle Monoradarprogramme wird die gleiche Parametereinstellung (h,s) vorausgesetzt.

Die Zustandsmenge Z für eine Einzelspur wird in zwei disjunkte Teilmengen zerlegt

$$\widetilde{Z}_1 := \{ z_{h+1}, \ldots, z_{h+s} \}$$
$$\widetilde{Z}_2 := \{ z_1, \ldots, z_h \}$$

Eine Gesamtspur existiert genau dann im Zentralprogramm, wenn in mindestens einer Einzelspur ein Verfolgungserwartungsgebiet vorliegt. Für $\bar{Z}$ wird somit folgende Zerlegung definiert

$$\widetilde{\bar{Z}}_2 := \widetilde{Z}_2^s$$
$$\widetilde{\bar{Z}}_1 := \bar{Z} - \widetilde{\bar{Z}}_2$$

Die Bildung des mengentheoretischen Produkts aus Einzelzustandsmengen ist mit der Zerlegung der Zustandsmenge vertauschbar, es gilt also $\widetilde{\bar{Z}} = \widetilde{\bar{Z}}$.

Die Teilmenge $\widetilde{\bar{Z}}_2 \subset \bar{Z}$ enthält genau diejenigen Zustände der Gesamtspur, die im Zentralprogramm nicht auftreten. Mit dieser Zerlegung von $\bar{Z}$ erhält man eine abgeleitete Kette $\widetilde{\bar{K}}$ für $\bar{K}$.

Die Entdeckungswahrscheinlichkeit in der Kette $K^{(1)}$ werde mit p_{E_1} bezeichnet. Bei gleicher Parametereinstellung (h,s) für alle Ketten $K^{(1)}$ erhält man für die Zustandswahrscheinlichkeiten und Übergangswahrscheinlichkeiten in $\widetilde{\bar{K}}$ und $\widetilde{\widetilde{\bar{K}}}$ für den Gleichgewichtszustand die folgenden Formeln.

Beim Übergang von $\widetilde{Z}_1$ auf $\widetilde{Z}_2$ in einer Einzelkette $K^{(1)}$ geht nur der Zustand $Z_{h+s} \in \widetilde{Z}_1$ mit einer von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit in $\widetilde{Z}_2$ über. Somit gilt

$$\widetilde{q}_{12} = \frac{q_{h+s} \cdot p_{h+s,1}}{\widetilde{q}_1} = \frac{p_{E_1}^{\,h} \; (1-p_{E_1})^{s-1} \cdot (1-p_{E_1})}{p_{E_1}^{\,h} \cdot \sum_{i=0}^{s-1} (1-p_{E_1})^i}$$

$$\widetilde{q}_{11} = \frac{\sum_{i=0}^{s-1} (1-p_{E_1})^i - (1-p_{E_1})^s}{\sum_{i=0}^{s-1} (1-p_{E_1})^i} \qquad \text{(F.4.2.3.)}$$

Beim Übergang von $\widetilde{Z}_2$ auf $\widetilde{Z}_1$ in $K^{(1)}$ geht nur der Zustand $Z_h \in \widetilde{Z}_2$ mit einer von Null verschiedenen Wahrscheinlichkeit in $\widetilde{Z}_1$ über.

Somit gilt

$$\tilde{q}_{21} = \frac{q_h \cdot p_{h,h+1}}{\tilde{q}_2} = \frac{p_{E_1}^{h-1} (1-p_{E_1})^s \cdot p_{E_1}}{(1-p_{E_1})^s \sum_{i=0}^{h-1} p_{E_1}^i}$$

$$\tilde{q}_{22} = \frac{\sum_{i=0}^{h-1} p_{E_1}^i - p_{E_1}^h}{\sum_{i=0}^{h-1} p_{E_1}^i} \qquad \text{(F.4.2.4.)}$$

Aus dem Satz 4.1.1. folgt unmittelbar:

$$N(r_{E_1}, h, s) \cdot \tilde{q}_2(1) = (1-p_{E_1})^s \sum_{i=0}^{h-1} p_{E_1}^i$$

Aus der Definition von $\tilde{\tilde{Z}}_2$ folgt wegen der Unabhangigkeit der Einzelketten:

$$\tilde{\tilde{q}}_2 = \prod_{l=1}^{g} \tilde{q}_2(l)$$

und somit

$$\tilde{\tilde{q}}_2 = \prod_{l=1}^{g} \frac{(1-p_{E_1})^s \sum_{i=0}^{h-1} p_{E_1}^i}{(1-p_{E_1})^s \sum_{i=0}^{h-1} p_{E_1}^i + p_{E_1}^h \sum_{i=0}^{s-1} (1-p_{E_1})^i}$$

(F.4.2.5.)

Für alle Einzelspuren wird die gleiche Entdeckungswahrscheinlichkeit vorausgesetzt. Beim Übergang vom Takt t auf t+1 bleiben außer in der aktuellen Einzelspur in allen anderen Einzelspuren die Zustände erhalten. Wenn also beim Übergang von t auf t+1 die Zustandsmenge $\widetilde{\widetilde{Z}}_1$ in $\widetilde{\widetilde{Z}}_2$ übergeht, so lag im Takt t in der aktuellen Einzelspur die Zustandsmenge $\widetilde{Z}_1$ und in allen übrigen Einzelspuren die Zustandsmenge $\widetilde{Z}_2$ vor. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt $\widetilde{q}_1 \cdot \widetilde{q}_2^{g-1}$. Somit folgt:

$$\widetilde{\widetilde{q}}_{12} = \frac{\widetilde{q}_1 \cdot \widetilde{q}_2^{g-1} \cdot \widetilde{q}_{12}}{\widetilde{q}_1} = \frac{\widetilde{q}_1 \cdot \widetilde{q}_2^{g-1} \cdot \widetilde{q}_{12}}{1-\widetilde{q}_2^{g}}$$

$$\widetilde{\widetilde{q}}_{11} = \frac{1-\widetilde{q}_2^{g-1} \cdot (\widetilde{q}_2+\widetilde{q}_1 \cdot \widetilde{q}_{12})}{1-\widetilde{q}_2^{g}} \qquad \text{(F.4.2.6.)}$$

$$\widetilde{\widetilde{q}}_{22} = \widetilde{q}_{22} \qquad \text{(F.4.2.7.)}$$

Liegt in einem Takt t die Zustandsmenge $\widetilde{\widetilde{Z}}_1$ vor und im Takt t'=t+g die Menge $\widetilde{\widetilde{Z}}_2$, so liegt im Takt t in mindestens einer Einzelspur die Menge $\widetilde{Z}_1$ und im Takt t' in allen Einzelspuren die Menge $\widetilde{Z}_2$ vor. Unter der Voraussetzung 4.2.1. lautet somit die Übergangswahrscheinlichkeit $\widetilde{\widetilde{q}}_{12}(g)$:

$$\widetilde{\widetilde{q}}_{12} = \frac{1}{\widetilde{q}_1}\left(\sum_{k=0}^{g-1}\binom{g}{g-k}(\widetilde{q}_1 \cdot \widetilde{q}_{12})^{g-k} \cdot (\widetilde{q}_2 \cdot \widetilde{q}_{22})^{k}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\widetilde{q}_2^{g}}\left((\widetilde{q}_1 \cdot \widetilde{q}_{12}+\widetilde{q}_2 \cdot \widetilde{q}_{22})^{g} - (\widetilde{q}_2 \cdot \widetilde{q}_{22})^{g}\right)$$

Im stationären Zustand gilt:

$$\widetilde{q}_1 \cdot \widetilde{q}_{12} + \widetilde{q}_2 \cdot \widetilde{q}_{22} = \widetilde{q}_2$$

Somit folgt:

$$\widetilde{\widetilde{q}}_{12} = \frac{1}{1-\widetilde{q}_2^{\,g}} \left(\widetilde{q}_2^{\,g} - (\widetilde{q}_2 \cdot \widetilde{q}_{22})^g \right) \qquad \text{(F.4.2.8.)}$$

Und somit

$$\widetilde{\widetilde{q}}_{11} = \frac{1-2\widetilde{q}_2^{\,g} + (\widetilde{q}_2 \cdot \widetilde{q}_{22})^g}{1-\widetilde{q}_2^{\,g}} \qquad \text{(F.4.2.9.)}$$

Aus der Definition von $\widetilde{\widetilde{Z}}_2$ folgt unmittelbar

$$\widetilde{\widetilde{q}}_{22} = \widetilde{q}_{22}^{\,g} \qquad \text{(F.4.2.10.)}$$

$$\widetilde{\widetilde{q}}_{21} = 1-\widetilde{q}_{22}^{\,g} \qquad \text{(F.4.2.11.)}$$

Die Zustandsmenge $\overline{Z}_1$ enthält genau diejenigen Gesamtspurzustände, die im Zentralprogramm geführt werden. Das Multiradarverfahren bietet die Möglichkeit, die Echtspuren aus den Falschspuren herauszufiltern, indem die Unabhängigkeit der Falschspurbildung in den Mono-Radar-Prozessen ausgenutzt wird. Es werden weitere Forderungen an die Zustände aus $\widetilde{\widetilde{Z}}_1$ gestellt, bevor sie als Spurzustände akzeptiert werden. Es wird hier ein solches Verfahren für die ungestörten Echtspuren betrachtet, um den Verlust bei der Echtspurführung abzuschätzen. Der Übersichtlichkeit halber wird der Fall g = 2 behandelt. Eine Gesamtspur wird erst dann akzeptiert, wenn sie aus verknüpften Einzelspuren besteht. Sind zwei Einzelspuren einmal zu einer Gesamtspur verknüpft worden, dann wird diese solange geführt, wie in mindestens einem Mono-Radar-Prozess eine Einzelspur sich im Verfolgungszustand befindet.

Der Zustand "Verknüpfung" im Takt t+1 folgt auf den Zustand "Nichtverknüpfung" im Takt t genau dann, wenn im Takt t+1 für beide Einzelspuren Verfolgungserwartungsgebiete mit Signalen vorliegen. Der Zustand "Nichtverknüpfung" im Takt t+1 folgt auf "Verknüpfung" im Takt t genau dann, wenn im Takt t+1 für beide Einzelspuren keine Verfolgungserwartungsgebiete vorliegen. Es wird für die Echtspuren bei diesem Verfahren eine Markoffsche Kette konstruiert:

A. Die Zustandspaare aus $\overline{Z}$ werden hinsichtlich ihres Verknüfungszustandes klassifiziert. Nichtverknüpfte Zustände werden durch ein Komma und verknüpfte Zustände durch ein "●" getrennt. Es werden folgende Mengen definiert:

$$W_1 := \left\{ z_i, z_k \;/\; (z_i, z_k) \in \overline{Z} \right\}$$
$$W_2 := \left\{ z_i \bullet z_k \;/\; (z_i, z_k) \in \overline{Z} \right\}$$

Die Gesamtzustandsmenge wird durch Vereinigung gebildet

$$W := W_1 \cup W_2$$

Die Teilmenge W_2 enthält genau diejenigen Zustände, die als Spurzustände gewertet werden.

B. Die Takte werden wie vorher definiert.

C. Es wird die Übergangsmatrix $\mathfrak{M}$ von einem Takt $t = 2k$ auf $t = 2(k+1)$ angegeben. $\mathfrak{M}$ zerfällt in vier Untermatrizen $M^{rs}(r,s = 1,2)$, die die Übergangsmatrizen von W_r auf W_s sind. Mit p_{ik} werden wieder die Übergangswahrscheinlichkeiten in einer Einzelkette bezeichnet, und es wird auf die vorher angegebene Zerlegung der Zustandsmenge $Z = \widetilde{Z}_1 \cup \widetilde{Z}_2$ Bezug genommen.

$t=2(k+1)$ / $t=2k$	$Z_l, Z_m \in W_1$	$Z_l \circ Z_m \in W_2$
$Z_i, Z_k \in W_1$	11 $p_{ik,lm}$	12 $p_{ik,lm}$
$Z_i \circ Z_k \in W_2$	21 $p_{ik,lm}$	22 $p_{ik,lm}$

Die Zustandsmenge W_1 wird in vier disjunkte Teilmengen zerlegt:

$$W_1 = \left(\widetilde{Z}_1 \times \widetilde{Z}_1 \right) \cup \left(\widetilde{Z}_1 \times \overline{\widetilde{Z}}_2 \right) \cup \left(\overline{\widetilde{Z}}_2 \times \widetilde{Z}_1 \right) \cup \left(\overline{\widetilde{Z}}_2 \times \overline{\widetilde{Z}}_2 \right) .$$

Die Teilmenge $\widetilde{Z}_1 \times \widetilde{Z}_1$ von W_1 enthält alle Zustande, bei denen in beiden Spuren Verfolgungserwartungsgebiete vorliegen. Ein Zustand $Z_i, Z_k \in W_1$ im Takt t geht somit in einen Zustand $Z_l, Z_m \in W_1$ im Takt t+2 über, wenn $Z_l, Z_m \in W_1 - \widetilde{Z}_1 \times Z_1$ oder wenn im Takt t+1 in mindestens einer Einzelspur kein Signal aufgetreten ist:

$$p^{11}_{ik,lm} = p_{il} \cdot p_{km} \quad \text{für } Z_l, Z_m \in W_1 - \widetilde{Z}_1 \times \widetilde{Z}_1$$

$$p^{11}_{ik,lm} = (1-p_E^2) \cdot p_{il}\, p_{km} \quad \text{für } Z_l, Z_m \in \widetilde{Z}_1 \times \widetilde{Z}_1$$

Der Zustand Verknüpfung tritt genau dann im Takt t+1 ein, wenn $Z_l, Z_m \in \widetilde{Z}_1 \times \widetilde{Z}_1$ und in beiden Einzelspuren ein Signal vorliegt:

$$P^{12}_{ik,lm} = p_E^2 \cdot p_{il} \cdot p_{km} \quad \text{für } Z_l \circ Z_m \in \tilde{Z}_1 \circ \tilde{Z}_1$$

$$P^{12}_{ik,lm} = 0 \text{ für } Z_l \circ Z_m \in W_2 - Z_1 \circ Z_1 .$$

Zur Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten $P^{21}_{ik,lm}$ und $P^{22}_{ik,lm}$ wird die Zustandsmenge W_2 ebenfalls in vier disjunkte Teilmengen zerlegt:

$$W_2 = \left(\tilde{Z}_1 \circ \tilde{Z}_1\right) \cup \left(\tilde{Z}_1 \circ \tilde{Z}_2\right) \cup \left(\tilde{Z}_2 \circ \tilde{Z}_1\right) \cup \left(\tilde{Z}_2 \circ \tilde{Z}_2\right) .$$

Die Verknüpfung der beiden Einzelspuren bleibt solange bestehen, wie mindestens eine Einzelspur sich im Verfolgungszustand befindet. Sie wird also genau dann aufgehoben, wenn im Takt t+2 in beiden Einzelspuren Zustände aus $\tilde{Z}_2$ vorliegen.

$$P^{21}_{ik,lm} = 0 \quad \text{für } Z_l, Z_m \in W_1 - \tilde{Z}_2 \times \tilde{Z}_2$$

$$P^{21}_{ik,lm} = p_{il} \cdot p_{km} \quad \text{für } Z_l, Z_m \in \tilde{Z}_2 \times \tilde{Z}_2 .$$

$$P^{22}_{ik,lm} = p_{il} \cdot p_{km} \quad \text{für } Z_l \circ Z_m \in W_2 - \tilde{Z}_2 \circ \tilde{Z}_2$$

$$P^{22}_{ik,lm} = 0 \quad \text{für } Z_l \circ Z_m \in \tilde{Z}_2 \circ \tilde{Z}_2$$

In den Ketten:

$$\mathcal{K} = \{ w; \mathfrak{M} \}$$

sind für $0 \leq p_E \leq 1$ die Zustände aus $\tilde{Z}_2 \circ \tilde{Z}_2$ vorübergehend. Für $0 < p_E < 1$ sind alle übrigen Zustände wesentlich und miteinander verbunden, so daß die Ketten ergodisch sind. Für $p_E = 0$ ist nur der Zustand Z_1, Z_1 und für $p_E = 1$ nur der Zustand $Z_{h+1} \circ Z_{h+1}$ wesentlich. Alle übrigen Zustände sind vorübergehend.

4.3. Ungestörte Echtspuren mit Informationsaustausch im Multi-Radar-Verfahren

Findet zwischen den Einzelspuren ein Informationsaustausch statt, dann sind die Einzelketten nicht mehr unabhängig. Die Übergänge in einer Einzelkette hängen von den Zustanden, die in den übrigen Einzelketten vorliegen, ab. Es wird hier der Fall betrachtet, daß eine Einzelspur, die einen Ausfaller hat, von einer anderen Einzelspur in der Gesamtspur eine Richtungsinformation übernimmt. Die aktuelle Einzelspur legt dann für den nächsten Antennenumlauf nicht ein Erwartungsgebiet höherer Stufe aus, sondern stuft auf ein Erwartungsgebiet der Stufe eins zurück. Dieses Rückstufungsgebiet hat eine andere Form als das normale Rückstufungsgebiet. Da hier die Größe aber keine Rolle spielt, braucht zwischen den beiden Rückstufungsgebieten nicht unterschieden zu werden.

Da die Einzelketten nicht unabhängig sind, lassen sich die Übergangswahrscheinlichkeiten für die Gesamtkette nicht als Produkte der Einzelübergangswahrscheinlichkeiten darstellen. Führt man jedoch eine neue Zustandsmenge für die Einzelspuren ein, indem für jedes Erwartungsgebiet zwei Zustände definiert werden, dann erhält man in der Gesamtkette eine Darstellung der Übergangswahrscheinlichkeiten als Produkte von bedingten Einzelübergangswahrscheinlichkeiten.

A. Die Zustandsmenge Z für eine Einzelspur wird folgendermaßen definiert:

Z_1: = kein Erwartungsgebiet und Signal

Z_2: = Aufgreiferwartungsgebiet mit Signal

Z_{2+i}: = Erwartungsgebiet der Stufe 1 und i-ter Ordnung mit Signal $i = 1,\ldots,h-2$

Z_{h+1}: = Verfolgungserwartungsgebiet der Stufe 1 mit Signal

Z_{h+1+i}: = Verfolgungserwartungsgebiet der Stufe i+1 mit Signal $i = 1,\ldots,s-1$

Z_{h+s+1}: = kein Erwartungsgebiet und kein Signal

Z_{h+s+2}: = Aufgreiferwartungsgebiet ohne Signal

$Z_{h+s+2+i}$: = Erwartungsgebiet der Stufe 1 und i-ter Ordnung ohne Signal $i = 1,\ldots,h-2$

Z_{2h+s+1}: = Verfolgungserwartungsgebiet der Stufe 1 ohne Signal

$Z_{2h+s+1+i}$ = Verfolgungserwartungsgebiet der Stufe i+1 ohne Signal $i = 1,\ldots,s-1$

Die Zustandsmenge $\overline{Z}$ für die Gesamtspur wird als das Produkt der Einzelzustandsmengen $Z^{(1)}$ definiert:

$$\overline{Z}: = Z^{(1)} x \ldots x Z^{(s)}$$

B. Die Taktung wird wie in 4.2. definiert.

C. Die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{ik} in einer Einzelkette lauten:

$$p_{1,2} = p_E;\ p_{1,h+s+2} = 1-p_E;\quad \text{sonst } p_{i,k} = 0$$

$$p_{2+i,2+i+1} = p_E;\quad p_{2+i,h+s+i+1} = 1-p_E;\quad \text{sonst } p_{2+i,k} = 0$$
$$i = 0,\ldots,h-2$$

$$p_{h+1+i,h+1} = p_E;\ p_{h+1+i,2h+s+1} = 1-p_E;\quad \text{sonst } p_{h+1+i,k} = 0$$
$$i = 0,\ldots,s-1$$

$$p_{h+s+i,1} = p_E;\ p_{h+s+i,h+s+1} = 1-p_E;\quad \text{sonst } p_{h+s+1,k} = 0$$
$$i = 1,\ldots,h$$

$$p_{2h+s+i,h+1+i} = p_E;\ p_{2h+s+i,2h+s+1+i} = 1-p_E;\ \text{sonst } p_{2h+s+i,k} = 0$$
$$i = 1,\ldots,s-1$$

$$p_{2(h+s),1} = p_E;\ p_{2(h+s),h+s+1} = 1-p_E;\quad \text{sonst } p_{2(h+s),k} = 0$$

Die Übergangsmatrix ist in den folgenden zwei Tabellen dargestellt.

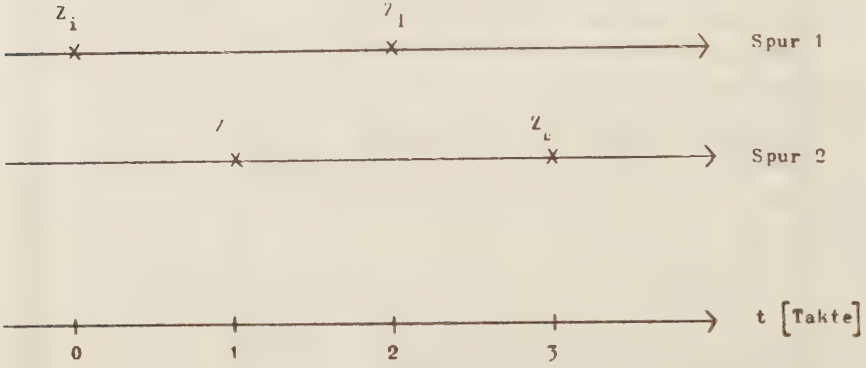
$t \backslash t+1$	Z_1	Z_2	.....	Z_h	Z_{h+1}	.....	Z_{h+s-1}	Z_{h+s}
Z_1	0	p_E		0	0		0	0
Z_2	0	0		0	0		0	0
⋮								
Z_h	0	0		0	p_E		0	0
Z_{h+1}	0	0		0	p_E		0	0
⋮					|			
Z_{h+s-1}	0	0		0	p_E		0	0
Z_{h+s}	0	0		0	p_E		0	0
Z_{h+s+1}	p_E	0		0	0		0	0
Z_{h+s+2}	p_E	0		0	0		0	0
⋮	|							
Z_{2h+s}	p_E	0		0	0		0	0
Z_{2h+s+1}	0	0		0	0		0	0
⋮								
$Z_{2(h+s)-1}$	0	0		0	0		0	p_E
$Z_{2(h+s)}$	p_E	0		0	0		0	0

Übergangsmatrix für eine ungestörte Einzelspur (linke Hälfte)

t \ $t+1$	Z_{h+s+1}	Z_{h+s+2}	.....	$Z_{2\,h+s}$	$Z_{2\,h+s+1}$	.....	$Z_{2(h+s)-1}$	$Z_{2\,(h+s)}$
Z_1	0	$1-p_E$		0	0		0	0
Z_2	0	0		0	0		0	0
⋮								
Z_h	0	0		0	$1-p_E$		0	0
Z_{h+1}	0	0		0	$1-p_E$		0	0
⋮					|			
Z_{h+s-1}	0	0		0	$1-p_E$		0	0
Z_{h+s}	0	0		0	$1-p_E$		0	0
Z_{h+s+1}	$1-p_E$	0		0	0		0	0
Z_{h+s+2}	$1-p_E$	0		0	0		0	0
⋮	|							
$Z_{2\,h+s}$	$1-p_E$	0		0	0		0	0
$Z_{2\,h+s+1}$	0	0		0	0		0	0
⋮								
$Z_{2(h+s)-1}$	0	0		0	0		0	$1-p_E$
$Z_{2\,(h+s)}$	$1-p_E$	0		0	0		0	0

Übergangsmatrix für eine ungestörte Einzelspur (rechte Hälfte)

Es wird der Fall $g = 2$ betrachtet. In beiden Einzelspuren liege die gleiche Parametereinstellung (p_E, h, s) vor. Die Spur 1 werde in den Takten gerader Anzahl aktuell und die Spur 2 in den Takten ungerader Anzahl.



Geht der Zustand Z_i in den Zustand Z_l über und liegt für Z_i kein Signal vor, dann wird von Spur 2 eine Richtung übernommen, wenn dort ein Signal vorlag. Die bedingte Übergangswahrscheinlichkeit von Z_i nach Z_l unter Z_k wird mit $p_{il}^{(k)}$ bezeichnet. Übernimmt eine Einzelspur eine Information, so ist der Übergang in der zweiten Einzelspur unabhängig von dem erfolgten Übergang in der ersten Spur. Unter der Voraussetzung 4.2.1. erhält man somit folgende Produktdarstellung der Übergangswahrscheinlichkeiten von einem Takt $t = 2k$ auf $t = 2k+2$

$$p_{ik,lm} = p_{il}^{(k)} \cdot p_{km}^{(l)} \qquad (F.4.3.1.)$$

Befindet sich eine Spur im Aufgreifzustand oder ist ihr ein Signal zugeordnet worden, dann übernimmt sie keine Information. Von einer Spur, die sich im Aufgreifzustand befindet, oder der kein Signal zugeordnet wurde, wird keine Information übernommen. Somit lauten die bedingten Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$p_{il}^{(k)} = p_{il} \quad \left\} \begin{array}{l} i \in \{1,\ldots,2h+s\} \\ \text{oder} \\ k \in \{1,\ldots,h,h+s+1,\ldots,2(h+s)\} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} p_{2h+s+i,h+1}^{(k)} = p_E \\ p_{2h+s+i,2h+s+1}^{(k)} = 1-p_E \end{array} \right\} \begin{array}{l} i \in \{1,\ldots,s\} \\ \text{und} \\ k \in \{h+1,\ldots,h+s\} \end{array}$$

Analog werden für Gesamtspuren in Bereichen g-facher Überdeckung bedingte Übergangswahrscheinlichkeiten definiert:

$$p_{ik}^{(j_1,\ldots,j_{g-1})} = p_{ik} \quad \left\} \begin{array}{l} i \in \{1,\ldots,2h+s\} \\ \text{oder für alle } j_1 \text{ gilt:} \\ j_1 \in \{1,\ldots,h,h+s+1,\ldots,2(h+s)\} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} p_{2h+s+i,h+1}^{(j_1,\ldots,j_{g-1})} = p_E \\ p_{2h+s+i,2h+s+1}^{(j_1,\ldots,j_{g-1})} = 1-p_E \end{array} \right\} \begin{array}{l} i \in \{1,\ldots,s\} \\ \text{und nicht für alle } j_1 \text{ gilt:} \\ j_1 \in \{1,\ldots,h,h+s+1,\ldots,2(h+s)\} \end{array}$$

Unter der Voraussetzung 4.2.1. gilt für die Übergangswahrscheinlichkeiten von einem Takt t auf t' = t+g

$$p_{i_1 \ldots i_g, k_1 \ldots k_g}(g) = \prod_{l=1}^{g} p_{i_l k_l} \qquad (k_1, \ldots, k_{l-1}, i_{l+1}, \ldots, i_g)$$

(F.4.3.2.)

Somit ist jedem Parameterquadrupel (p_E, h, s, g) eine Markoffsche Kette erster Ordnung

$$\bar{K}(p_E, h, s, g) = \left\{ \bar{Z}, \bar{M}(0), \ldots, \bar{M}(g-1) \right\}$$

zugeordnet worden.

Satz 4.3.1.:

Die Zustandswahrscheinlichkeiten in $\bar{K}$ konvergieren

$$\lim_{k \to \infty} p_{i_1 \ldots i_g}(k \cdot l+1) = q^{(l)}_{i_1 \ldots i_g} \qquad l = 0, \ldots, g-1$$

Für die Grenzwahrscheinlichkeiten gilt:

$$q^{(0)}_{i_1 \ldots i_g} = q^{(1)}_{i_2 i_1 \ldots i_g} = \ldots = q^{(g-1)}_{i_1 \ldots i_g i_{g-1}}$$

BEWEIS:

Aus der Kette $\bar{K}$ werden g Teilketten konstruiert, indem die Übergangsmatrizen von einem Takt t = k · g+l auf t' = (k+1)·g+l betrachtet werden. Der Satz wird nur für den Fall g = 2 bewiesen. Dann erhält man zwei Ketten $\bar{K}_o, \bar{K}_1$. Es sei $(Z_i, Z_k) \in Z_o$ und $0 < p_E < 1$. Der Zustand (Z_i, Z_k) geht mit positiver Wahrscheinlichkeit in (Z_1, Z_1) über, wenn beiden Einzelspuren hinreichend oft kein Signal zugeordnet wurde.

Der Zustand (Z_1,Z_1) geht dann mit positiver Wahrscheinlichkeit in den Zustand (Z_1,Z_m) über. Somit sind alle Zustände wesentlich und bilden eine einzige Klasse. Da der Zustand (Z_1,Z_1) beliebig viele aufeinanderfolgende Takte mit positiver Wahrscheinlichkeit in sich übergeht, sind alle Zustände nichtperiodisch. Für $p_E = 0$ der $p_E = 1$ sind nur die Zustände (Z_1,Z_1) bzw. (Z_{h+1},Z_{h+1}) wesentlich. Alle übrigen Zustände sind vorübergehend.

Analog wird gezeigt, daß in der Kette $\bar{K}_1$ für $0 < p_E < 1$ alle Zustände wesentlich und nichtperiodisch sind und für $p_E = 0$ oder $p_E = 1$ nur die Zustände (Z_1,Z_1) bzw. (Z_{h+1},Z_{h+1}) wesentlich sind. Die Ketten $\bar{K}_0$ und $\bar{K}_1$ sind also nach Satz 2.2. ergodisch. Für die Übergangswahrscheinlichkeiten in $\bar{K}_0$ gilt nach F.4.3.1.:

$$p^{(0)}_{ik,lm} = p^{(k)}_{il} \cdot p^{(1)}_{km}$$

Beim Übergang von einem Takt $t = k \cdot g+1$ auf $t' = (k+1) \cdot g+1$ geht im ersten Takt der Zustand Z_i aus der zweiten Einzelspur unter einem festen Zustand Z_k in der ersten Einzelspur in einem Zustand Z_l über. Im nächsten Takt geht Z_k unter Z_l in einen Zustand Z_m über. Somit gilt:

$$p^{(1)}_{ki,ml} = p^{(k)}_{il} \cdot p^{(1)}_{km}$$

Und somit:

$$p^{(0)}_{ik,lm} = p^{(1)}_{ki,ml}$$

Die Grenzwahrscheinlichkeiten sind eindeutige Lösungen folgender Gleichungssysteme:

$$q_{ik}^{(r)} = \sum_{l} \sum_{m} q_{lm}^{(r)} \cdot p_{lm,ik}^{(r)}$$

$$\sum_{i} \sum_{k} q_{ik}^{(r)} = 1 \qquad r = 0,1$$

Insbesondere gilt

$$q_{ki}^{(1)} = \sum_{l} \sum_{m} q_{lm}^{(1)} \cdot p_{lm,ki}^{(1)} = \sum_{m} \sum_{l} q_{lm}^{(1)} \cdot p_{lm,ki}^{(1)}$$

$$= \sum_{l} \sum_{m} q_{ml}^{(1)} \cdot p_{ml,ki}^{(1)}$$

$$q_{ik}^{(0)} = \sum_{l} \sum_{m} q_{lm}^{(0)} \cdot p_{lm,ik}^{(0)} = \sum_{l} \sum_{m} q_{lm}^{(0)} \cdot p_{ml,ki}^{(1)}$$

Und somit

$$q_{ik}^{(0)} = q_{ki}^{(1)}$$

5. Gestörte Echtspuren im Multi-Radar-Verfahren

Bei der Beschreibung ungestörter Echtspuren brauchte die Form und Größe von Erwartungsgebieten nicht berücksichtigt zu werden. Eine exakte Beschreibung des Einflusses der Störungen auf die Echtspuren ist kaum möglich, zumal im Multi-Radar-Verfahren die Konfiguration der Radargeräte und Ort und Richtung der Echtspuren zu berücksichtigen wären. Es sind daher einige Idealisierungen notwendig, um für gestörte Echtspuren eine Markoffsche Kette aufbauen zu können. Diese Idealisierungen sind in der Praxis mit guter Näherung erfüllt, so daß der Haupteinfluß der Störungen auf die Echtspurbildung erfaßt wird. Der reine Falschspurprozeß wird durch die statistischen Eigenschaften der Störsignale und durch das Verfolgungsverfahren definiert. Es wird ein Bereich g-facher Überdeckung betrachtet. Die Störsignale treten in den einzelnen Mono-Radar-Prozessen unabhängig voneinander auf. Folgende Annahmen gelten für alle Mono-Radar-Prozesse.

Annahme 5.1.

Die Störsignale sind in dem betrachteten Bereich gleichverteilt, d.h. die Falschmeldewahrscheinlichkeit p_F ist für alle Rasterpunkte des Bereiches gleich.

Annahme 5.2.

Die Falschmeldewahrscheinlichkeit p_F ist vom Antennenumlauf unabhängig.

Annahme 5.3.

Das betrachtete Gebiet ist hinreichend groß, so daß für den reinen Falschspurprozeß die Diffusion der Spuren am Rande des Gebietes nicht berücksichtigt zu werden braucht. Im Inneren des Gebietes verhält sich dann der reine Falschspurprozeß wie auf einer geschlossenen Fläche.
Echtspuren und Falschspuren werden folgendermaßen definiert:

Definition 5.1.

Eine Spur, die nur aus Zielsignalen desselben Flugobjektes besteht, heißt Echtspur. Jede andere Spur heißt eine Falschspur.

Definition 5.2.

Ein Erwartungsgebiet, zu dessen Auslegung nur Zielsignale desselben Flugobjektes benutzt wurden, heißt echt. Jedes andere Erwartungsgebiet heißt falsch.

Zunächst wird der Einfluß der Störungen auf die Echtspurbildung im Mono-Radar-Verfahren betrachtet.

Der Einfluß der Störungen auf die Echtspuren im Monoradarprozeß besteht im verhinderten Aufgreifen und der Auslenkung der Echtspuren. Der Einfluß des verhinderten Aufgreifens auf den Echtspurprozeß wird durch Angabe einer Bedeckungswahrscheinlichkeit p_B definiert

p_B: = Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Rasterpunkt in dem betrachteten Gebiet von mindestens einem Erwartungsgebiet bedeckt ist.

Eine Echtspur bildet in ihrer Umgebung Parasiten und bewirkt so eine lokale Verstärkung des Falschspurprozesses (Clustereffekt). Sind zwei Echtspuren hinreichend benachbart, so kann der Aufgreifvorgang jeder Echtspur durch die Parasiten der anderen Echtspur verhindert werden. Bricht eine Echtspur ab, dann können ihre Parasiten in der gegebenen Richtung weiterlaufen und so das Wiederaufgreifen der Echtspur verhindern. An der Bedeckung der Fläche durch Erwartungsgebiete sind somit Echtspuren, Falschspuren und Parasiten beteiligt. Eine exakte Berechnung der Bedeckungswahrscheinlichkeit p_B wird somit sehr kompliziert, da die Form der Erwartungsgebiete berücksichtigt werden müßte. Weiterhin wäre eine Annahme über die Verteilung der echten Meldungen in dem betrachteten Gebiet erforderlich. Es werden daher einige Voraussetzungen getroffen, die mit guter Näherung erfüllt sind, und die eine einfache Beschreibung des Echtspurprozesses im Mono-Radar-Verfahren ermöglichen.

Voraussetzung 5.1.

Echtspuren beeinflussen sich nicht gegenseitig. Sie sind paarweise hinreichend getrennt, so daß insbesondere die Parasiten einer Echtspur den Falschspurprozess in der Umgebung weiterer Echtspuren nicht beeinflussen.

Voraussetzung 5.2.

Die von einer Echtspur erzeugten Parasiten beeinflussen den Falschspurprozess in der Umgebung der nicht erwarteten echten Meldungen dieser Echtspur nicht.

Unter diesen Voraussetzungen kann die Bedeckungswahrscheinlichkeit p_B in der Umgebung nicht erwarteter echter Meldungen aus dem reinen Falschspurprozess gewonnen werden. Für den Falschspurprozess wird der stationäre Zustand vorausgesetzt, so daß der Mittelwert für die Falschspuranzahl pro Antennenumlauf konstant ist. Dem stationären Falschspurprozess wird eine Echtspur überlagert. Eine nicht erwartete echte Meldung, die in ein zu einer Falschspur gehöriges Erwartungsgebiet fällt, kann zum Entstehen einer Echtspur ohne eigenes Aufgreiferwartungsgebiet führen, wenn die Richtungen der Falschspur und der Echtspur innerhalb gewisser Toleranzen übereinstimmen. Dieser Fall wird vernachlässigt.

Voraussetzung 5.3.

Fällt in einem Antennenumlauf t eine nicht erwartete echte Meldung in ein falsches Erwaftungsgebiet und trifft im

Antennenumlauf t+1 vom selben Flugziel wieder ein Signal ein, dann wird dieses Signal der durch das erste Echtsignal fortgesetzten Falschspur nicht zugeordnet.

Der Einfluß der Störungen für den Verfolgungsprozeß der Echtspuren (Auslenken der Echtspuren) wird durch die folgende Voraussetzung festgelegt:

Voraussetzung 5.4.

Fällt in ein echtes Erwartungsgebiet kein Zielsignal und tritt stattdessen ein Störsignal auf, so wird der so entstehende Parasit so weit von der Echtspurrichtung ausgelenkt, daß ihm keines der folgenden Zielsignale zugeordnet wird.

Unter diesen Voraussetzungen genügt es wieder, zur Beschreibung des Echtspurprozesses im Mono-Radar-Verfahren eine einzelne Echtspur zu betrachten. Die Echtspuren lassen sich dann durch eine homogene Markoffsche Kette erster Ordnung beschreiben.

Es wird jetzt der Einfluß der Störungen auf die Echtspurbildung im Multi-Radar-Verfahren betrachtet:

Findet zwischen den Einzelspuren in einer Gesamtspur kein Informationsaustausch statt, dann besteht der Einfluß der Störungen darin, daß die Verknüpfung von Echtspuren aufgehoben wird. Tritt in einer Einzelspur statt eines Echtsignals ein Störsignal auf, dann wird diese Spur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit aus ihrer Gesamtspur herausgelöst. Bei allen Verfahren, die eine bestimmte Mindestanzahl von Einzelspuren in einer Gesamtspur ver-

langen, wird somit die mittlere Länge von Echtspuren abnehmen. Eine Falschspur kann über mehrere Antennenumläufe in einer Gesamtspur, die sonst aus Echtspuren besteht, geführt werden. Da die Falschspurbildung unkorreliert mit der Bildung der übrigen Echtspuren ist, wächst die Wahrscheinlichkeit, daß die Falschspur aus der Gesamtspur herausgelöst wird, mit der Zahl der Antennenumläufe. Die wahrscheinlichkeitstheoretische Beschreibung der Gesamtspur würde also auf eine Markoffsche Kette höherer Ordnung führen, bei deren Konstruktion außerdem die Form der Erwartungsgebiete zu berücksichtigen wäre. Es wird eine Voraussetzung getroffen, die in guter Näherung erfüllt ist und die es ermöglicht, die Form der Erwartungsgebiete unberücksichtigt zu lassen und die Gesamtspur durch eine Kette erster Ordnung zu beschreiben.

Bei der Partnerschaftsprüfung werden die beiden jüngsten Signale der aktuellen Spur und das jüngste Signal des möglichen Partners verwendet.

Voraussetzung 5.5.

Liegt in einer Einzelspur ein echtes Erwartungsgebiet vor und in einer zweiten ein falsches Erwartungsgebiet, dann entscheidet die Partnerschaftsprüfung auf "Nichtpartnerschaft". Liegen in allen drei Spurzuständen Signale vor und ist eines davon ein Störsignal, dann wird auf "Nichtpartnerschaft" entschieden.

Findet zwischen den Einzelspuren ein Informationsaustausch statt, dann tritt ein weiterer Störeinfluß für die Echtspuren auf. Eine Echtspur, der in einem Antennenumlauf kein Signal zugeordnet wurde, kann von einer Partnerspur eine falsche Richtung übernehmen, wenn dieser statt eines Echtsignals

ein Falschsignal zugeordnet wurde. Der Informationsaustausch zeigt also bei gestörten Echtspuren zwei gegenläufige Tendenzen.

Voraussetzung 5.6.

Übernimmt eine Echtspur eine falsche Richtung zur Auslegung eines EG's, dann fällt die erwartete Meldung nicht in dieses EG.

Beim Informationsaustausch verlaufen die reinen Falschspurprozesse in den Monoradarprogrammen nicht mehr unabhängig. Da aber die Verknüpfung von Falschspuren selten auftritt, wird die gegenseitige Beeinflussung vernachlässigt.

Voraussetzung 5.7.

Der Informationsaustausch hat keinen Einfluß auf die Falschspurbildung in den Mono-Radar-Prozessen.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es keine Verknüpfungen zwischen Falschspuren und Echtspuren. Eine Falschspur wird in einer Gesamtspur, in der mindestens eine Echtspur auftritt, nicht geführt. Die Gesamtspur läßt sich somit für Echtspuren durch eine homogene Markoffsche Kette erster Ordnung beschreiben. Die zu definierende Zustandsmenge und die Übergangswahrscheinlichkeiten hängen von dem Verfahren ab. Tritt in einer Einzelspur eine Verzweigung auf, dann wird für jeden Zweig eine Gesamtspur aufgebaut.

Liegt in einer Einzelspur ein leeres Erwartungsgebiet vor, dann wird mit dieser Spur keine Partnerschaftsprüfung durchgeführt. Eine bestehende Verknüpfung bleibt somit erhalten, eine neue Verknüpfung wird nicht eingegangen. Das Verknüpfungsverfahren arbeitet so, daß jeweils die letzten zwei Signale der aktuellen Spur mit dem jüngsten Signal der zweiten Spur verglichen werden. Dabei wird mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit auf Partnerschaft entschieden, die von den drei vorliegenden Spurzuständen abhängt. Diese Wahrscheinlichkeiten sind Parameter, die als Zuordnungswahrscheinlichkeiten eingeführt werden.

z_{ij}^{k} = Wahrscheinlichkeit, daß auf Partnerschaft entschieden wird, wenn in der aktuellen Einzelspur die Spurzustände Z_i und Z_j vorliegen und in der zweiten Einzelspur der Zustand Z_k vorliegt. Dabei wird vorausgesetzt, daß beide Spuren bereits verknüpft waren.

$\bar{z}_{ij}^{k}$ = Analog, wenn beide Spuren vorher nicht verknüpft waren.

5.1. Gestörte Echtspuren im Monoradarverfahren

Es ist gezeigt worden [7] , daß der reine Falschspurprozeß im Monoradarverfahren in guter Näherung durch ein Übergangsgleichungssystem beschrieben werden kann. Dieses Gleichungssystem wird für (h,s) = (2,2) angegeben, für allgemeines (h,s) ist es analog aufgebaut.

$$F_{11}(t+1) = p_F \left[Y(t)\, A + F_{11}(t)\cdot r_{11} + F_{21}(t)\cdot r_{21}\right] \qquad (1)$$

$$F_{21}(t+1) = p_F \left[F_{12}(t)\cdot r_{12} + F_{22}(t)\cdot r_{22}\right] \qquad (2)$$

$$F_{12}(t+1) = (1-p_F)^{r_{11}} \cdot F_{11}(t) \qquad (3)$$

$$F_{22}(t+1) = (1-p_F)^{r_{21}} \cdot F_{21}(t) \qquad (4)$$

$$Y(t+1) = p_F \cdot S \cdot (1-p_B(t)) \qquad (5)$$

$$1-p_B(t) = \exp\left(-\frac{G(t)}{S}\right)$$

$$G(t) = Y(t)\cdot A + \sum_i \sum_k F_{ik}(t)\cdot r_{ik}$$

Es bedeuten:

S = Anzahl der Rasterpunkte in dem betrachteten Gebiet

p_F = Falschmeldewahrscheinlichkeit

Y(t) = mittlere Anzahl der im Antennenumlauf t vorhandenen Aufgreiferwartungsgebiete.

F_{ik} = mittlere Anzahl der im Antennenumlauf t vorhandenen Verfolgungserwartungsgebiete vom Typ (i,k)

A = Anzahl der Rasterpunkte in einem Aufgreiferwartungsgebiet

r_{ik} = Anzahl der Rasterpunkte im Verfolgungserwartungsgebiet vom Typ (i,k)

Alle Störsignale, die in unbedeckten Rasterpunkten auftreten, führen zu Aufgreiferwartungsgebieten (Gleichung (5)). Die leeren Verfolgungserwartungsgebiete vom Typ (1,1) bzw. (2,1) führen auf Erwartungsgebiete der nächsten Stufe (Gleichungen (3) und (4)), während die Erwartungsgebiete vom Typ (1,1), (2,1), (1,2) und (2,2), denen ein Signal zugeordnet wurde, auf Erwartungsgebiete des Typs (1,1) bzw. (2,1) führen (Gleichungen (1) und (2)). Die Aufgreiferwartungsgebiete, denen ein Signal zugeordnet wurde, führen auf Verfolgungserwartungsgebiete vom Typ (1,1)(Gleichung (1)).

Das Übergangsgleichungssystem gestattet es, für den Falschspurprozeß die Bedeckungswahrscheinlichkeit p_B zu berechnen. Dem stationären Falschspurprozeß wird eine Echtspur überlagert und für diese eine Markoffsche Kette konstruiert, die den Einfluß der Störsignale (verhindertes Aufgreifen, Auslenken der Echtspur) beschreibt:

A. Für jedes Erwartungsgebiet werden drei Zustände definiert. Es wird abkürzend gesetzt:

$$1(i,k) = 3(h-1) + 3\,((i-1)\cdot s+k-1)$$

für $1 \leq i,\ k \leq s$

$$1(s,s)+3 = v$$

Z_1: = Aufgreiferwartungsgebiet mit echtem Signal

Z_2: = Aufgreiferwartungsgebiet ohne echtes Signal, mit Störsignal

Z_3: = Aufgreiferwartungsgebiet leer

Z_{3i+1}: = EG vom Typ (1,1) und i-ter Ordnung mit echtem Signal

Z_{3i+2}: = EG vom Typ (1,1) und i-ter Ordnung ohne echtes Signal, mit Störsignal

$Z_{3(i+1)}$: = EG vom Typ (1,1) und leer

$i = 1,\ldots,h-2$

$Z_{1(i,k)+1}$: = Verfolgungserwartungsgebiet vom Typ (i,k) mit echtem Signal

$Z_{1(i,k)+2}$: = Verfolgungserwartungsgebiet vom Typ (i,k) ohne echtes Signal, mit Störsignal

$Z_{1(i,k)+3}$: = Verfolgungserwartungsgebiet, leer

$i,k = 1,\ldots,s$

Z_{v+1}: = kein echtes EG, echtes Signal in einem unbedeckten Rasterpunkt

Z_{v+2}: = kein echtes EG, kein echtes Signal in einem unbedeckten Rasterpunkt

B. Die Takte sind durch die Antennenumläufe gegeben.

Die Übergangswahrscheinlichkeiten lauten:

Für $i = 0,\ldots,h-2$:

$$p_{3i+1,i+4} = p_E$$

$$p_{3i+1,i+5} = (1-p_E)\left(1-(1-p_F)^{r_{11}}\right)$$

$$p_{3i+1,i+6} = (1-p_E)\,(1-p_F)^{r_{11}};\quad \text{sonst } p_{3i+1,j} = 0$$

$$p_{3i+2,v+1} = p_{3i+3,v+1} = p_E(1-p_B) =: \overline{p_E}$$

$$p_{3i+2,v+2} = p_{3i+3,v+2} = 1-\overline{p_E};\quad \text{sonst } p_{3i+2,j} = p_{3i+3,j} = 0$$

Für $i,k = 1,\ldots,s$:

$$p_{1(i,k)+1,1(i,1)+1} = p_E$$

$$p_{1(i,k)+1,1(i,1)+2} = (1-p_E)\left(1-(1-p_F)^{r_{i1}}\right)$$

$$p_{1(i,k)+1,1(i,1)+3} = (1-p_E)\,(1-p_F)^{r_{i1}};\quad \text{sonst } p_{1(i,k)+1,j} = 0$$

$$p_{1(i,k)+2,v+1} = \overline{p_E}$$

$$p_{1(i,k)+2,v+2} = 1-\overline{p_E}$$

Für $i = 1,\ldots,s$; $k = 1,\ldots,s-1$:

$$p_{1(i,k)+3;1(i,k+1)+1} = p_E$$

$$p_{1(i,k)+3;1(i,k+1)+2} = (1-p_E)\left(1-(1-p_F)^{r_{i,k+1}}\right)$$

$$p_{1(i,k)+3;1(i,k+1)+3} = (1-p_E)\,(1-p_F)^{r_{i,k+1}};\quad \text{sonst } p_{1(i,k)+3,j} = 0$$

Für $i = 1,\ldots,s$; $k = s$:

$$p_{1(i,k)+3;v+1} = \overline{p_E}$$

$$p_{1(i,k)+3;v+2} = 1-\overline{p_E};\quad \text{sonst } p_{1(i,k)+3,v+2} = 0\ .$$

$$p_{\nu+1;1} = p_E$$

$$p_{\nu+1;2} = (1-p_E) \cdot \left(1-(1-p_F)^{r_\nu}\right)$$

$$p_{\nu+1;3} = (1-p_E) \cdot (1-p_F)^{r_\nu}; \quad \text{sonst } p_{\nu+1,j} = 0$$

$$p_{\nu+2;\nu+1} = \overline{p_E}$$

$$p_{\nu+2;\nu+2} = 1-\overline{p_E}; \quad \text{sonst } p_{\nu+2,j} = 0$$

Somit ist jedem Parameterquadrupel (p_E,p_F,h,s) eine homogene Markoffsche Kette erster Ordnung

$$K(p_E,p_F,h,s) = (Z,M^r)$$

zugeordnet worden. Analog wie in 4.1. zeigt man, daß die Ketten für alle $0 \leq p_E \leq 1$, $0 \leq p_F \leq 1$, $h \leq 2$ und $s \geq 1$ ergodisch sind.

Die Übergangsmatrix wird für $h = 3$ und $s = 2$ in den folgenden vier Tabellen dargestellt. Es gibt 20 Zustände. Die Untermatrix M_1 enthält die Übergangswahrscheinlichkeiten von $Z_1,\ldots,Z_9$ auf $Z_1,\ldots,Z_9$; die Untermatrix M_2 die Übergangswahrscheinlichkeiten von $Z_1,\ldots,Z_9$ auf $Z_{10},\ldots,Z_{20}$; die Untermatrix M_3 die Übergangswahrscheinlichkeiten von $Z_{10},\ldots,Z_{20}$ auf $Z_1,\ldots,Z_9$ und die Untermatrix M_4 die Übergangswahrscheinlichkeiten von $Z_{10},\ldots,Z_{20}$ auf $Z_{10},\ldots,Z_{20}$. Für $(1-p_E) \cdot (1-p_F)^{r_{ik}}$ wird abkürzend q_{ik} und für $(1-p_E) \cdot (1-(1-p_F)^{r_{ik}}$ $\overline{q}_{ik}$ gesetzt.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	$Z_{1(1,1)+1}$	$Z_{1(1,1)+2}$	$Z_{1(1,1)+3}$
Z_1	0	0	0	p_E	$\overline{q}_{11}$	q_{11}	0	0	0
Z_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Z_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Z_4	0	0	0	0	0	0	p_E	$\overline{q}_{11}$	q_{11}
Z_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Z_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_{1(1,1)+1}$	0	0	0	0	0	0	p_E	$\overline{q}_{11}$	q_{11}
$Z_{1(1,1)+2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_{1(1,1)+3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Übergangsmatrix für eine gestörte Echtspur (Untermatrix M_1) h=3, s=2

	$Z_{1(1,2)\cdot 1}$	$Z_{1(1,2)\cdot 2}$	$Z_{1(1,2)\cdot 3}$	$Z_{1(2,1)\cdot 1}$	$Z_{1(2,1)\cdot 2}$	$Z_{1(2,1)\cdot 3}$	$Z_{1(2,2)\cdot 1}$	$Z_{1(2,2)\cdot 2}$	$Z_{1(2,2)\cdot 3}$	$Z_{V\cdot 1}$	$Z_{V\cdot 1}$
Z_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Z_2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{p_E}$	$1-\overline{p_E}$
Z_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{p_E}$	$1-\overline{p_E}$
Z_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Z_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{p_E}$	$1-\overline{p_E}$
Z_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{p_E}$	$1-\overline{p_E}$
$Z_{1(1,1)\cdot 1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_{1(1,1)\cdot 2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{p_E}$	$1-\overline{p_E}$
$Z_{1(1,1)\cdot 3}$	0	0	0	p_E	$\overline{q_{12}}$	q_{12}	0	0	0	0	0

Übergangsmatrix für eine gestörte Echtspur (Untermatrix M_2) $h=3, s=2$

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	$Z_{1(1,1)\cdot 1}$	$Z_{1(1,1)\cdot 2}$	$Z_{1(1,1)\cdot 3}$
$Z_{1(1,2)\cdot 1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_{1(1,2)\cdot 2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_{1(1,2)\cdot 3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_{1(2,1)\cdot 1}$	0	0	0	0	0	0	p_E	$\overline{q_{11}}$	q_{11}
$Z_{1(2,1)\cdot 2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_{1(2,1)\cdot 3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_{1(2,2)\cdot 1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_{1(2,2)\cdot 2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_{1(2,2)\cdot 3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_{V\cdot 1}$	p_E	$\overline{q_0}$	q_0	0	0	0	0	0	0
$Z_{V\cdot 2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Übergangsmatrix für eine gestörte Echtspur (Untermatrix M_3) h=3, s=2

	$Z_{1(1,2)\cdot 1}$	$Z_{1(1,2)\cdot 2}$	$Z_{1(1,2)\cdot 3}$	$Z_{1(2,1)\cdot 1}$	$Z_{1(2,1)\cdot 2}$	$Z_{1(2,1)\cdot 3}$	$Z_{1(2,2)\cdot 1}$	$Z_{1(2,2)\cdot 2}$	$Z_{1(2,2)\cdot 3}$	$Z_{V\cdot 1}$	$Z_{V\cdot 2}$
$Z_{1(1,2)\cdot 1}$	0	0	0	p_E	$\overline{q_{11}}$	q_{21}	0	0	0	0	0
$Z_{1(1,2)\cdot 2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{p_E}$	$1-\overline{p_E}$
$Z_{1(1,2)\cdot 3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{p_E}$	$1-\overline{p_E}$
$Z_{1(2,1)\cdot 1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_{1(2,1)\cdot 2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{p_E}$	$1-\overline{p_E}$
$Z_{1(2,1)\cdot 3}$	0	0	0	0	0	0	p_E	$\overline{q_{22}}$	q_{22}	0	0
$Z_{1(2,2)\cdot 1}$	0	0	0	p_E	$\overline{q_{21}}$	q_{21}	0	0	0	0	0
$Z_{1(2,2)\cdot 2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{p_E}$	$1-\overline{p_E}$
$Z_{1(2,2)\cdot 3}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{p_E}$	$1-\overline{p_E}$
$Z_{V\cdot 1}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_{V\cdot 2}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\overline{p_E}$	$1-\overline{p_E}$

Übergangsmatrix für eine gestörte
Echtspur (Untermatrix M_4) h=3,s=2

5.2. Gestörte Echtspuren im Multiradarverfahren

Eine Gesamtspur in einem Bereich g-facher Überdeckung besteht aus maximal g Einzelspuren. Durch die in den Erwartungsgebieten auftretenden Störungen kann die Verknüpfung von Partnern in einer Gesamtspur aufgehoben werden. Im Zentralprogramm können so die g Einzelspuren in verschiedenen Verknüpfungszuständen auftreten. Bei der Informationsübernahme tauschen nur solche Einzelspuren Informationen, die miteinander verknüpft sind. Zur Beschreibung des Informationsaustausches und aller Verfahren, die eine bestimmte Mindestanzahl von Einzelspuren für eine Gesamtspur verlangen, sind die Spurzustände also ebenfalls hinsichtlich ihres Verknüpfungszustandes zu klassifiziern.

A. Das mengentheoretische Produkt der Einzelzustandsmengen enthält die Gesamtheit aller in den Mono-Radar-Prozessen auftretenden Spurzustände

$$\bar{Z} = Z^{(1)} \times \ldots \times Z^{(g)}$$

Miteinander verknüpfte Einzelspurzustände werden durch ein "&", nicht verknüpfte Zustände durch ein Komma getrennt.

Es wird der Fall g = 3 betrachtet. Zwischen den Einzelspuren finde kein Informationsaustausch statt. Hat eine Einzelspur einen Partner gefunden, dann wird nicht nach weiteren Partnern gesucht. Da nach Voraussetzung 5.5.

eine Echtspur nicht mit einer Falschspur verknüpft wird, kann nicht der Fall eintreten, daß eine Verknüpfung von Echtspuren durch Falschspuren verhindert wird. Bei diesem Verfahren sind folgende Verknüpfungszustände möglich:

$$W_1: = \{ z_i, z_j, z_k \quad / \quad z_i \in Z^{(1)}; z_j \in Z^{(2)}; z_k \in Z^{(3)} \}$$

$$W_2: = \{ z_i \otimes z_j, z_k \quad / \quad z_i \in Z^{(1)}; z_j \in Z^{(2)}; z_k \in Z^{(3)} \}$$

$$W_3: = \{ z_i \otimes z_k, z_j \quad / \quad z_i \in Z^{(1)}; z_j \in Z^{(2)}; z_k \in Z^{(3)} \}$$

$$W_4: = \{ z_i, z_j \otimes z_k \quad / \quad z_i \in Z^{(1)}; z_j \in Z^{(2)}; z_k \in Z^{(3)} \}$$

$$W_5: = \{ z_i \otimes z_j \otimes z_k \quad / \quad z_i \in Z^{(1)}; z_j \in Z^{(2)}; z_k \in Z^{(3)} \}$$

Die Zustandsmenge W für die Gesamtspur ergibt sich als die Vereinigung dieser Mengen

$$W: = \bigcup_{i=1}^{5} W_i$$

B. Die Takte werden wie in 4.2. definiert.

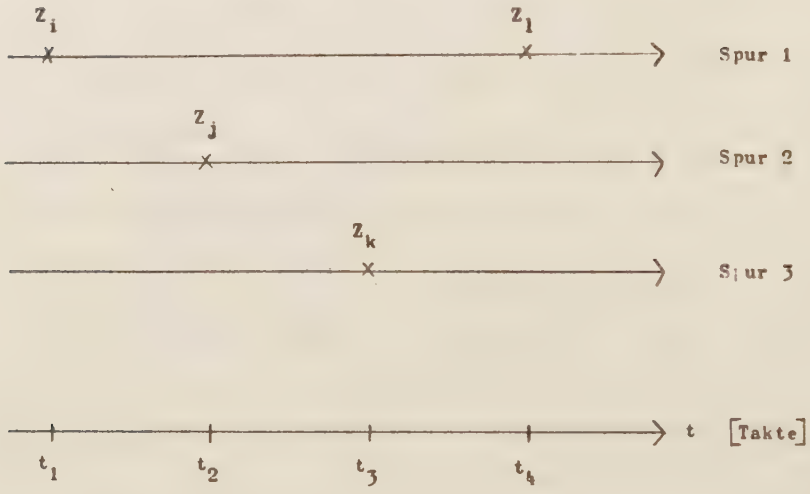
C. Die Übergangswahrscheinlichkeiten hängen von dem gewählten Verknüpfungskriterium ab. Für $g = 3$ lassen sich zwei Verknüpfungskriterien formulieren. Es sei die Voraussetzung 4.2.1. erfüllt; es treten drei verschiedene Übergangsmatrizen auf, die mit A,B,C bezeichnet werden.

Es seien vier Zeitpunkte

$$t_1 < t_2 < t_3 < t_4$$

gegeben. Im Zeitpunkt t_4 werde die erste Einzelspur aktuell

und es liege der Zustand $Z_1^{(1)}(t_4)$ vor. In den Zeitpunkten t_1, t_2, t_3 seien die Zustände $Z_i^{(1)}, Z_j^{(2)}, Z_k^{(3)}$ eingetreten.



Verknüpfungskriterium 1:

Jede Einzelspur muß mit mindestens einer weiteren Einzelspur in einer Gesamtspur das Partnerschaftskriterium erfüllen.

Verknüpfungskriterium 2:

Jede Einzelspur muß mit allen weiteren Einzelspuren in einer Gesamtspur die Partnerschaftsbedingungen erfüllen.

Eine aktuelle Einzelspur überprüft zunächst zu derjenigen Einzelspur die Parnterschaftsbedingungen, der das jüngste Signal zugeordnet wurde, und die sich im Verfolgungszustand befindet.

Ist mindestens einer der drei bei der Partnerschaftsprüfung beteiligten Spurzustände ein Aufgreifzustand, dann gilt

$$z_{il}^{k} = \bar{z}_{il}^{k} = 0$$

Liegt in einer Spur ein leeres Erwartungsgebiet vor, dann gilt

$$z_{il}^{k} = 1;\ \bar{z}_{il}^{k} = 0$$

Die Übergangsmatrizen A,B,C haben folgenden Aufbau. Die Elemente aus A sind mit $p_{il} \cdot \delta_{jm} \delta_{kn}$, die Elemente aus B mit $\delta_{il} \cdot p_{jm} \cdot \delta_{kn}$ und die Elemente aus C mit $\delta_{il} \cdot \delta_{jm} \cdot p_{kn}$ zu multiplizieren.

$t+1$ / $t=3k$	Z_i, Z_m, Z_n	$Z_i \circ Z_m, Z_n$	$Z_i \circ Z_n, Z_m$	$Z_i, Z_m \circ Z_n$	$Z_i \circ Z_m \circ Z_n$
Z_i, Z_j, Z_k	$(1-\bar{z}_{ii}^{k}) \times (1-\bar{z}_{ii}^{j})$	$(1-\bar{z}_{ii}^{k}) \times \bar{z}_{ii}^{j}$	$\bar{z}_{ii}^{k}$	0	0
$Z_i \circ Z_j, Z_k$	$(1-z_{ii}^{k}) \times (1-\bar{z}_{ii}^{k})$	z_{ii}^{j}	$(1-z_{ii}^{k}) \times \bar{z}_{ii}^{k}$	0	0
$Z_i \circ Z_k, Z_j$	$(1-z_{ii}^{k}) \times (1-z_{ii}^{j})$	$(1-z_{ii}^{k}) \times \bar{z}_{ii}^{j}$	z_{ii}^{k}	0	0
$Z_i, Z_j \circ Z_k$	0	0	0	$(1-\bar{z}_{ii}^{k}) \times (1-\bar{z}_{ii}^{j})$	$1-(1-\bar{z}_{ii}^{k}) \times (1-\bar{z}_{ii}^{j})$
$Z_i \circ Z_j \circ Z_k$	0	0	0	$(1-z_{ii}^{k}) \times (1-z_{ii}^{j})$	$1-(1-z_{ii}^{k}) \times (1-z_{ii}^{k})$

Übergangsmatrix A (Verknüpfungskriterium 1)

$t = 3k+1$	L_l, L_m, L_n	$L_l \circ L_m, L_n$	$L_l \circ L_n, L_m$	$L_l, L_m \circ L_n$	L_l, L_m, L_n
Z_i, Z_j, Z_k	$(1 - \bar{z}_{jm}^{l})$ $\times (1 - \bar{z}_{jm}^{k})$	$\bar{z}_{jm}^{l}$	0	$(1 - \bar{z}_{jm}^{l})$ $\bar{z}_{jm}^{k}$	0
$Z_i \circ Z_j, Z_k$	$(1 - z_{jm}^{l})$ $\times (1 - \bar{z}_{jm}^{k})$	z_{jm}^{l}	0	$(1 - z_{jm}^{l})$ $\times \bar{z}_{jm}^{k}$	0
$Z_i \circ Z_k, Z_j$	0	0	$(1 - \bar{z}_{jm}^{l})$ $\times (1 - \bar{z}_{jm}^{k})$	0	$1 - (1 - \bar{z}_{jm}^{l})$ $\times (1 - \bar{z}_{jm}^{k})$
$Z_i, Z_j \circ Z_k$	$(1 - z_{jm}^{k})$ $\times (1 - \bar{z}_{jm}^{l})$	$(1 - z_{jm}^{k})$ $\times \bar{z}_{jm}^{l}$	0	z_{jm}^{k}	0
$Z_i \circ Z_j \circ Z_k$	0	0	$(1 - z_{jm}^{l})$ $\times (1 - z_{jm}^{k})$	0	$1 - (1 - z_{jm}^{l})$ $\times (1 - z_{jm}^{k})$

Übergangsmatrix B (Verknüpfungskriterium 1)

$t+1$ / $t = 3k+2$	Z_l, Z_m, Z_n	$Z_l \bullet Z_m, Z_n$	$Z_l \bullet Z_n, Z_m$	$Z_l, Z_m \bullet Z_n$	$Z_l \bullet Z_m \bullet Z_n$
Z_i, Z_j, Z_k	$(1 - \bar{z}_{kn}^{m}) \times (1 - \bar{z}_{kn}^{l})$	0	$(1 - \bar{z}_{kn}^{m}) \times z_{kn}^{l}$	$\bar{z}_{kn}^{m}$	0
$Z_i \bullet Z_j, Z_k$	0	$(1 - \bar{z}_{kn}^{m}) \times (1 - \bar{z}_{kn}^{l})$	0	0	$1 - (1 - \bar{z}_{kn}^{m}) \times (1 - \bar{z}_{kn}^{l})$
$Z_i \bullet Z_k, Z_j$	$(1 - z_{kn}^{l}) \times (1 - \bar{z}_{kn}^{m})$	0	z_{kn}^{l}	$(1 - z_{kn}^{l}) \times \bar{z}_{kn}^{m}$	0
$Z_i \bullet Z_j, Z_k$	$(1 - z_{kn}^{m}) \times (1 - \bar{z}_{kn}^{l})$	0	$(1 - z_{kn}^{m}) \times \bar{z}_{kn}^{l}$	z_{kn}^{m}	0
$Z_i \bullet Z_j \bullet Z_k$	0	$(1 - z_{kn}^{m}) \times (1 - z_{kn}^{l})$	0	0	$1 - (1 - z_{kn}^{m}) \times (1 - z_{kn}^{l})$

Übergangsmatrix C (Verknüpfungskriterium 1)

t = 3k \ t + 1	Z_l, Z_m, Z_n	$Z_l \circ Z_m, Z_n$	$Z_l \circ Z_n, Z_m$	$Z_l, Z_m \circ Z_n$	$Z_l \circ Z_m \circ Z_n$
Z_i, Z_j, Z_k	$(1 - \bar{z}_{il}^{\,k}) \times (1 - \bar{z}_{il}^{\,j})$	$(1 - \bar{z}_{il}^{\,k}) \times \bar{z}_{il}^{\,j}$	$\bar{z}_{il}^{\,k}$	0	0
$Z_i \circ Z_j, Z_k$	$(1 - z_{il}^{\,j}) \times (1 - z_{il}^{\,k})$	$z_{il}^{\,j}$	$(1 - z_{il}^{\,j}) \times z_{il}^{\,k}$	0	0
$Z_i \circ Z_k, Z_j$	$(1 - z_{il}^{\,k}) \times (1 - \bar{z}_{il}^{\,j})$	$(1 - z_{il}^{\,k}) \times \bar{z}_{il}^{\,j}$	$z_{il}^{\,k}$	0	0
$Z_i, Z_j \circ Z_k$	0	0	0	$1 - \bar{z}_{il}^{\,k} \cdot \bar{z}_{il}^{\,j}$	$\bar{z}_{il}^{\,k} \cdot \bar{z}_{il}^{\,j}$
$Z_i \circ Z_j \circ Z_k$	0	0	0	$1 - z_{il}^{\,k} \cdot z_{il}^{\,j}$	$z_{il}^{\,k} \cdot z_{il}^{\,j}$

Übergangsmatrix A (Verknüpfungskriterium 2)

$t+1$ / $t=3k+1$	Z_l, Z_m, Z_n	$Z_l \bullet Z_m, Z_n$	$Z_l \bullet Z_n, Z_m$	$Z_l, Z_m \bullet Z_n$	$Z_l \bullet Z_m \bullet Z_n$
Z_i, Z_j, Z_k	$(1 - \bar{z}_{jm}^{l}) \times (1 - \bar{z}_{jm}^{k})$	$\bar{z}_{jm}^{l}$	0	$(1 - \bar{z}_{jm}^{l}) \times \bar{z}_{jm}^{k}$	0
$Z_i \bullet Z_j, Z_k$	$(1 - z_{jm}^{l}) \times (1 - \bar{z}_{jm}^{k})$	z_{jm}^{l}	0	$(1 - z_{jm}^{l}) \times \bar{z}_{jm}^{k}$	0
$Z_i \bullet Z_k, Z_j$	0	0	$1 - \bar{z}_{jm}^{l} \times \bar{z}_{jm}^{k}$	0	$\bar{z}_{jm}^{l} \times \bar{z}_{jm}^{k}$
$Z_i \bullet Z_j, Z_k$	$(1 - z_{jm}^{k}) \times (1 - \bar{z}_{jm}^{l})$	$(1 - z_{jm}^{k}) \times z_{jm}^{l}$	0	z_{jm}^{k}	0
$Z_i \bullet Z_j \bullet Z_k$	0	0	$1 - z_{jm}^{l} \times z_{jm}^{k}$	0	$z_{jm}^{l} \times z_{jm}^{k}$

Übergangsmatrix B (Verknüpfungskriterium 2)

t = 3k	Z_t, Z_m, Z_n	$Z_t \bullet Z_m, Z_n$	$Z_t, Z_n \bullet Z_m$	$Z_t \bullet Z_m, Z_n$	$Z_t \bullet Z_m \bullet Z_n$
Z_i, Z_j, Z_k	$(1 - \bar{Z}_{kn}^{m}) \times (1 - \bar{Z}_{kn}^{l})$	0	$(1 - \bar{Z}_{kn}^{m}) \times \bar{Z}_{kn}^{l}$	$\bar{Z}_{kn}^{m}$	0
$Z_i \bullet Z_j, Z_k$	0	$1 - \bar{Z}_{kn}^{m} \times \bar{Z}_{kn}^{l}$	0	0	$\bar{Z}_{kn}^{m} \times \bar{Z}_{kn}^{l}$
$Z_i \bullet Z_k, Z_j$	$(1 - z_{kn}^{l}) \times (1 - \bar{Z}_{kn}^{m})$	0	z_{kn}^{l}	$(1 - z_{kn}^{l}) \times \bar{Z}_{kn}^{m}$	0
$Z_i, Z_j \bullet Z_k$	$(1 - z_{kn}^{m}) \times (1 - \bar{Z}_{kn}^{l})$	0	$(1 - z_{kn}^{m}) \times \bar{Z}_{kn}^{l}$	$\bar{Z}_{kn}^{m}$	0
$Z_i \bullet Z_j \bullet Z_k$	0	$1 - z_{kn}^{m} \times z_{kn}^{l}$	0	0	$z_{kn}^{m} \times z_{kn}^{l}$

Übergangsmatrix C (Verknüpfungskriterium 2)

Findet ein Informationsaustausch zwischen den Einzelspuren statt, dann sind bei verknüpften Spuren die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{il} durch bedingte Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{il}^{(j,k)}$ zu ersetzen.

6. Numerische Ergebnisse

In den folgenden Abbildungen wird die Abhängigkeit der mittleren Spurlänge und mittleren Ausfalldauer der ungestörten Echtspuren von den Parametern g und p_E dargestellt. Dabei werden die beiden Verfahren "ohne Informationsübernahme" und "mit Informationsübernahme" betrachtet. Es wird nur der stationäre Zustand der Echtspurketten betrachtet, so daß die zufällige Veränderliche L_1 vom Takt unabhängig ist. Bei der Berechnung von L_1 werden dann für die Zustandswahrscheinlichkeiten $p_i(t_o-1)$ in der Formel F.3.3. die Grenzwahrscheinlichkeiten q_i eingesetzt, die durch Iteration mit der Übergangsmatrix gewonnen wurden.

In den letzten zwei Abbildungen ist die Existenzwahrscheinlichkeit für gestörte Echtspuren in Abhängigkeit von p_E mit p_F als Kurvenparameter aufgetragen. Die Existenzwahrscheinlichkeit ist definiert als Summe aller Zustandswahrscheinlichkeiten von echten Verfolgungserwartungsgebieten.

Die mittlere Spurlänge und die Ausfalldauer sind nach folgendem Verfahren berechnet worden. Mit den Bezeichnungen von 3. werde für t_o o.B.d.A. 0 gesetzt. Die Formeln F.3.2. und F.3.3. geben dann die Verteilung c(o). Für alle weiteren Takte t = 1,2,... wird dann rekursiv eine Verteilung c(t) definiert:

$$c_i(t) = \frac{\sum_{k}^{1} c_k(t-1) \cdot p_{ki}}{\sum_{r}^{1} \sum_{s}^{1} c_s(t-1) \cdot p_{sr}} \quad \text{für } Z_i \in \widetilde{Z}_1 \qquad \text{(F.6.1.}$$

$$c_i(t) = 0 \qquad \text{für } Z_i \in \widetilde{Z}_2 \qquad \text{(F.6.2.)}$$

Die Wahrscheinlichkeit $\widetilde{c}_{11}(t)$ dafür, daß $\widetilde{Z}_1$ beim Übergang von t auf t+1 in sich übergeht, unter der Bedingung, daß $\widetilde{Z}_1$ genau in den Takten 0,1,...,t vorlag, lautet:

$$\widetilde{c}_{11}(t) = \sum_{i}^{1} \sum_{k}^{1} c_i(t) \cdot p_{ik}$$

Somit erhält man die Verteilung der zufälligen Veränderlichen L_1:

$$P(L_1 = n) = (1-\widetilde{c}_{11}(n)) \cdot \prod_{i=0}^{n-1} \widetilde{c}_{11}(n) \qquad \text{(F.6.3.)}$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingung c(o) in die Formeln F.6.1. und F.6.2. sieht man, daß die durch F.6.3. gegebene Verteilung mit der in 3. definierten Verteilung für L_1 übereinstimmt.

Abbildung 1:

Die mittlere Länge von ungestörten Echtspuren ist in Abhängigkeit vom Überdeckungsgrad g aufgetragen. Es wird ein Ausfaller überbrückt (s = 2). Zwischen den Einzelspuren findet kein Informationsaustausch statt. Für alle Antennen ist die gleiche Umdrehungszeit vorausgesetzt, so daß die mittlere Spurlänge in Antennenumläufen angegeben werden kann.

Abbildung 2:

Entsprechend zur Abbildung 1 ist die mittlere Ausfalldauer von ungestörten Echtspuren in Abhängigkeit von g dargestellt.

Abbildung 3:

Für zweifache Überdeckung ist die mittlere Länge von ungestörten Echtspuren in Abhängigkeit von p_g in Takten aufgetragen. Durch den Informationsaustausch wächst die Spurlänge etwa um den Faktor zwei.

Abbildung 4:

Entsprechend zu Abbildung 3 ist die mittlere Ausfalldauer von ungestörten Echtspuren in Abhängigkeit von p_g aufgetragen. Findet kein Informationsaustausch statt, dann ist die Ausfall-

dauer vom Parameter s nicht abhängig. Beim Informationsaustausch ist die Ausfalldauer etwas größer als ohne Austausch und wächst mit dem parameter s. Ein Abbruch der Gesamtspur bedeutet ein gleichzeitiger Abbruch beider Einzelspuren, so daß im Mittel mehr Takte benötigt werden, bis mindestens eine der beiden Einzelspuren wieder in den Verfolgungszustand übergeht.

Abbildung 5:

Die mittlere Länge für ungestörte Echtspuren ist für dreifache Überdeckung in Abhängigkeit von p_E für die Parameter s = 1,2 aufgetragen.

Abbildung 6:

Entsprechend zu Abbildung 5 ist die mittlere Ausfalldauer aufgetragen.

Abbildung 7:

Eine Spur wird im Zentralprogramm erst dann als Gesamtspur akzeptiert, wenn beide Einzelspuren sich im Verfolgungszustand mit Signal befinden. Die Gesamtspur wird dann solange geführt, wie mindestens eine Einzelspur sich im Verfolgungszustand befindet. Die mittlere Spurlänge ist größer als die in Abbildung 3 dargestellte, da beim Beginn einer Spur für beide Einzelspuren ein Verfolgungserwartungsgebiet mit Signal vorliegt.

Abbildung 8:

Entsprechend zu Abbildung 7 ist die mittlere Ausfalldauer dargestellt. Die Ausfalldauer ist größer als die in Abbildung 4 dargestellte, da zu Beginn einer Gesamtspur sich beide Einzelspuren im Verfolgungszustand befinden müssen.

Abbildung 9:

Für zweifache Überdeckung ist die Existenzwahrscheinlichkeit für eine gestörte Echtspur ohne Informationsaustausch aufgetragen. Die Existenzwahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Spur im Zentralrechner geführt wird. Die Existenzwahrscheinlichkeit nimmt mit wachsendem p_F ab.

Abbildung 10:

Wie in Abbildung 9 ist die Existenzwahrscheinlichkeit für gestörte Echtspuren mit Informationsaustausch aufgetragen.

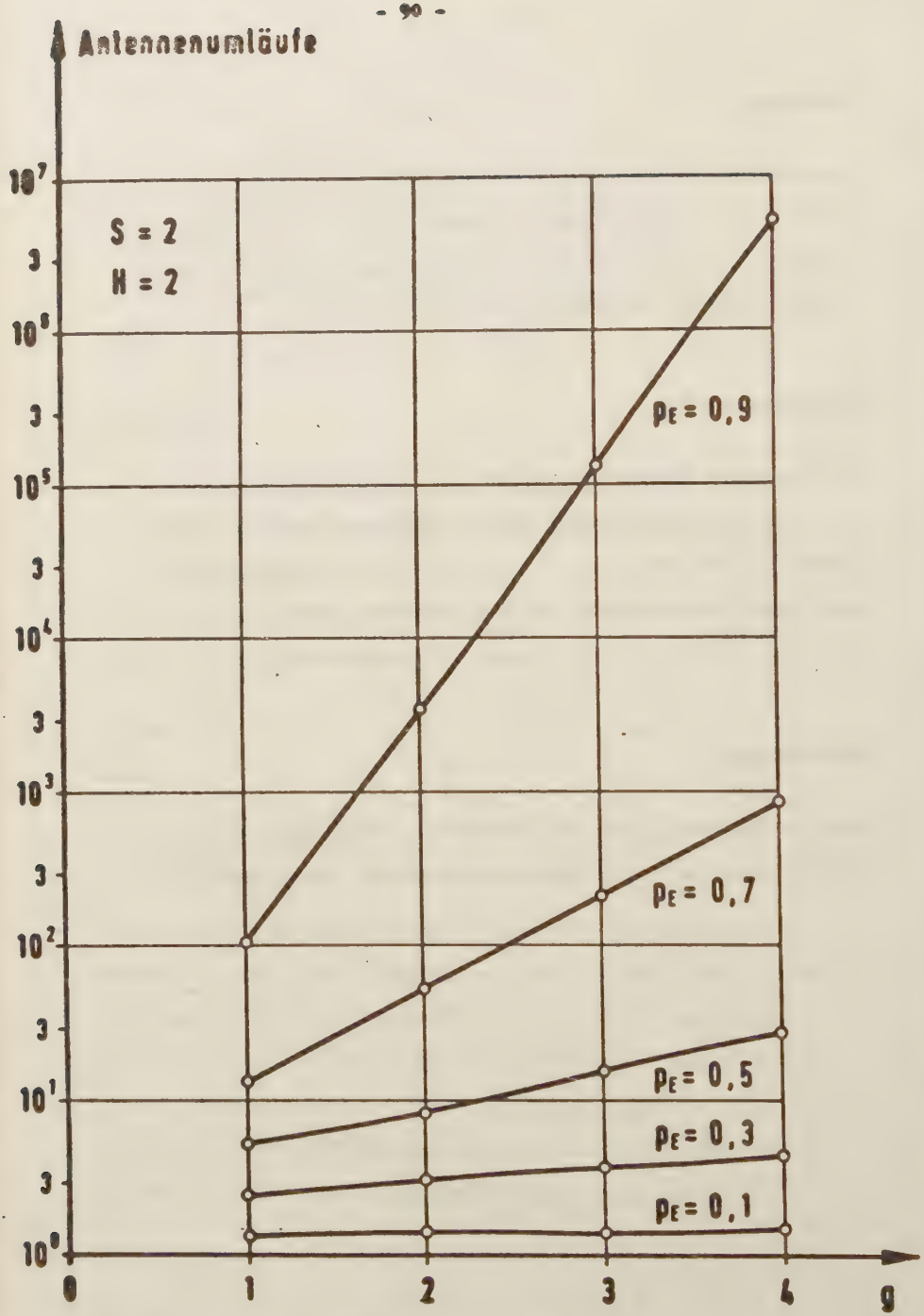


Abb. 1: Mittlere Spurlänge ohne Übernahme

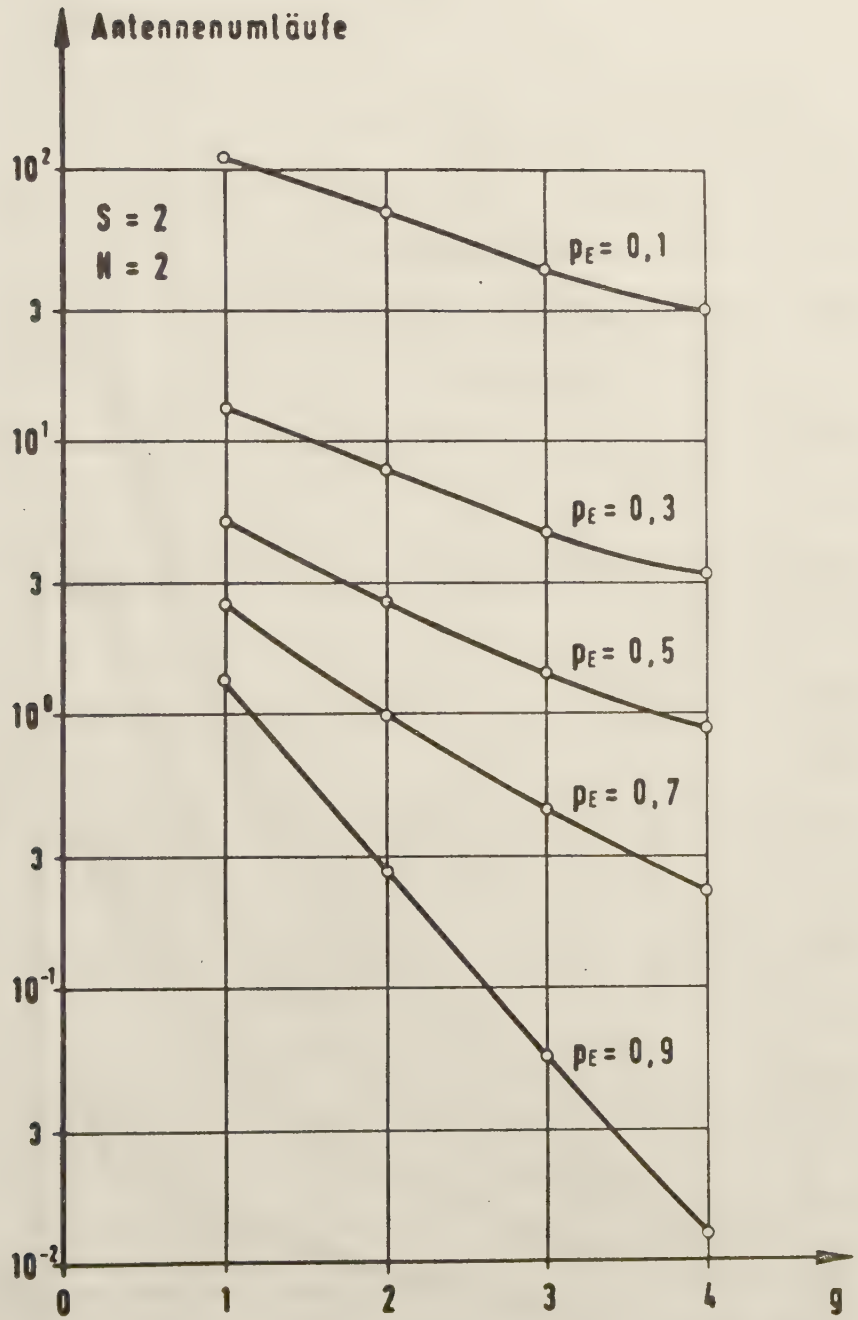


Abb. 2: Mittlere Ausfalldauer ohne Übernahme

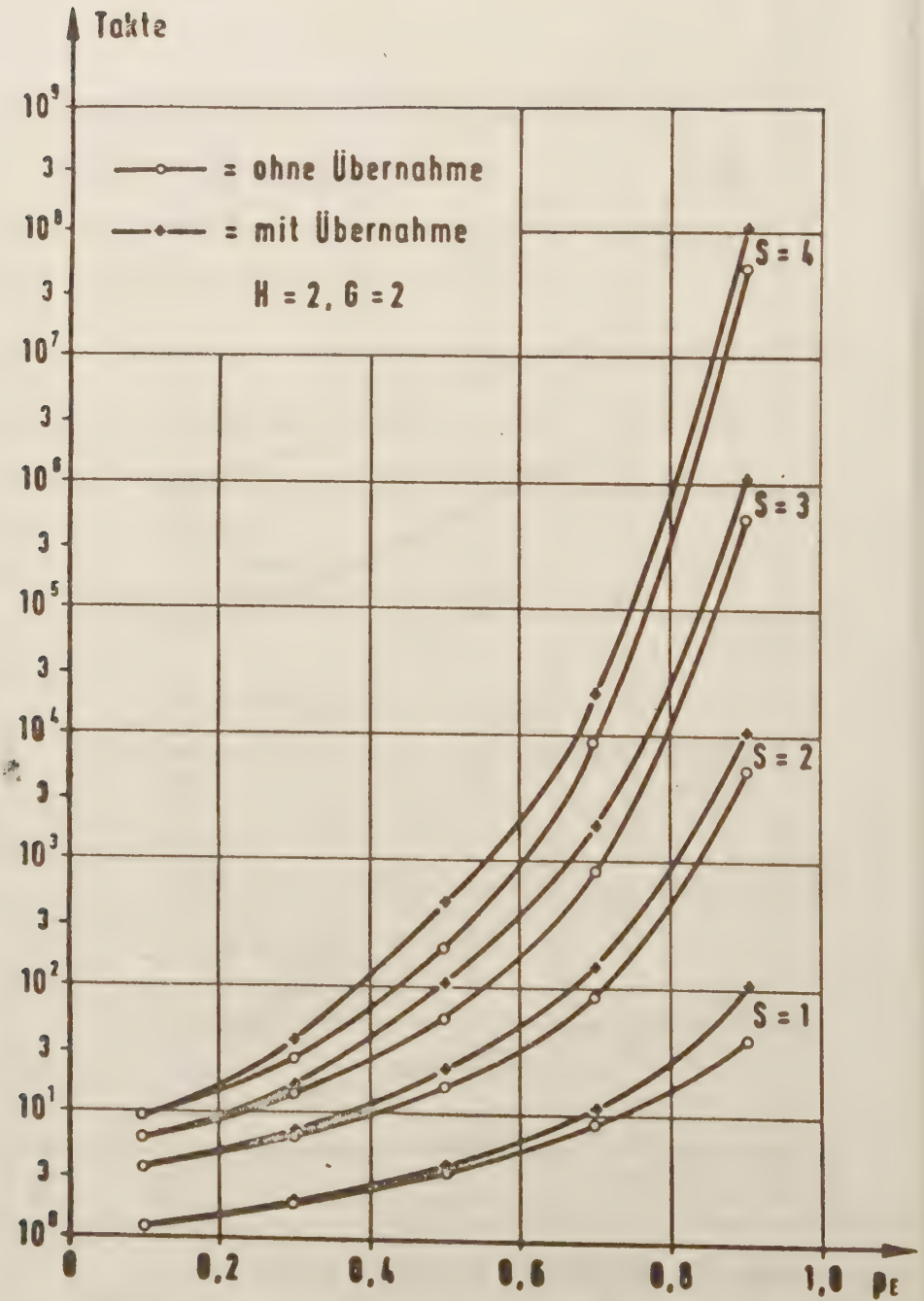


Abb. 3: Mittlere Spurlänge für Zwei - Radar

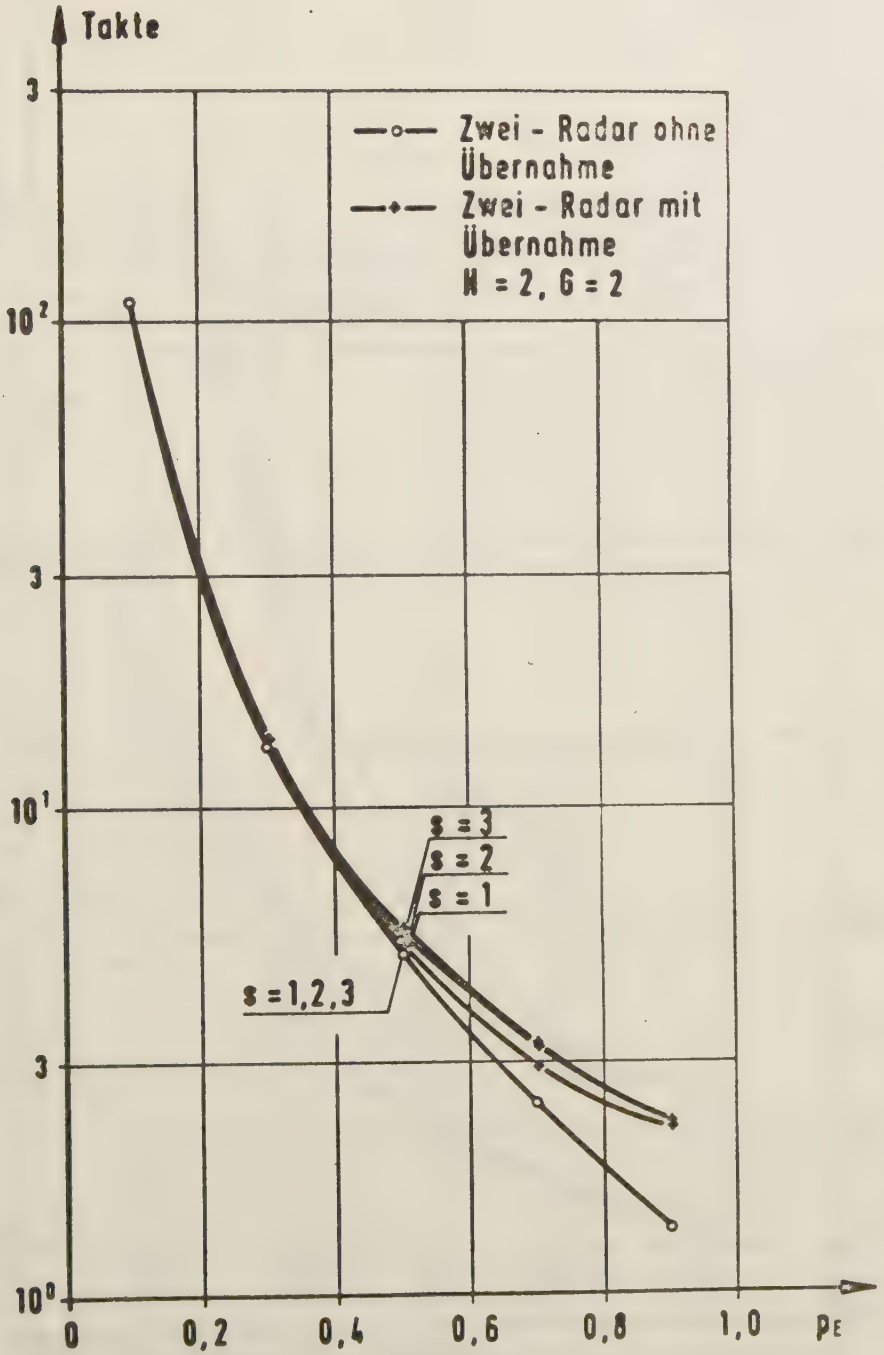


Abb. 4: Mittlere Ausfalldauer für Zwei-Radar

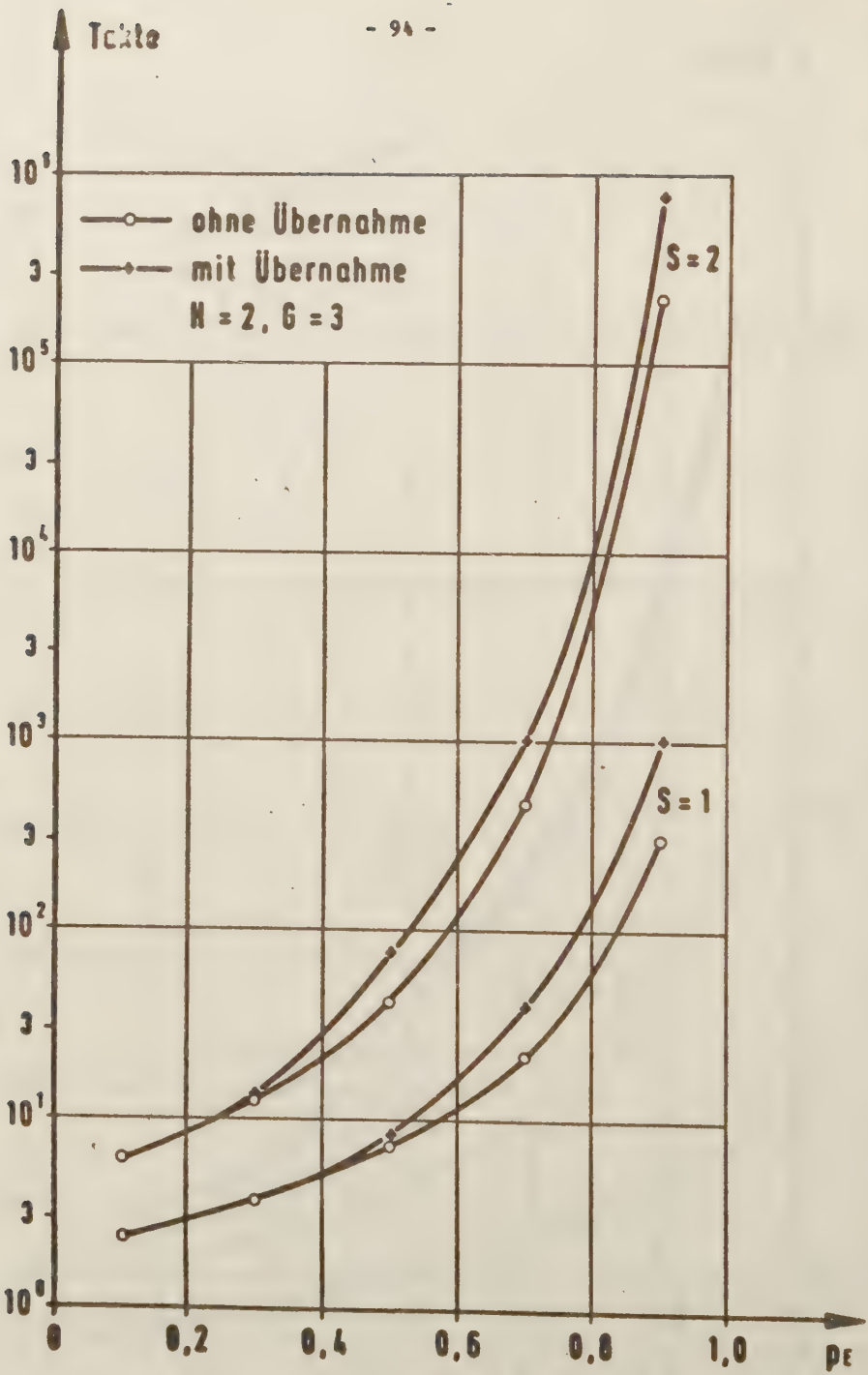


Abb. 5: Mittlere Spurlänge für Drei-Radar

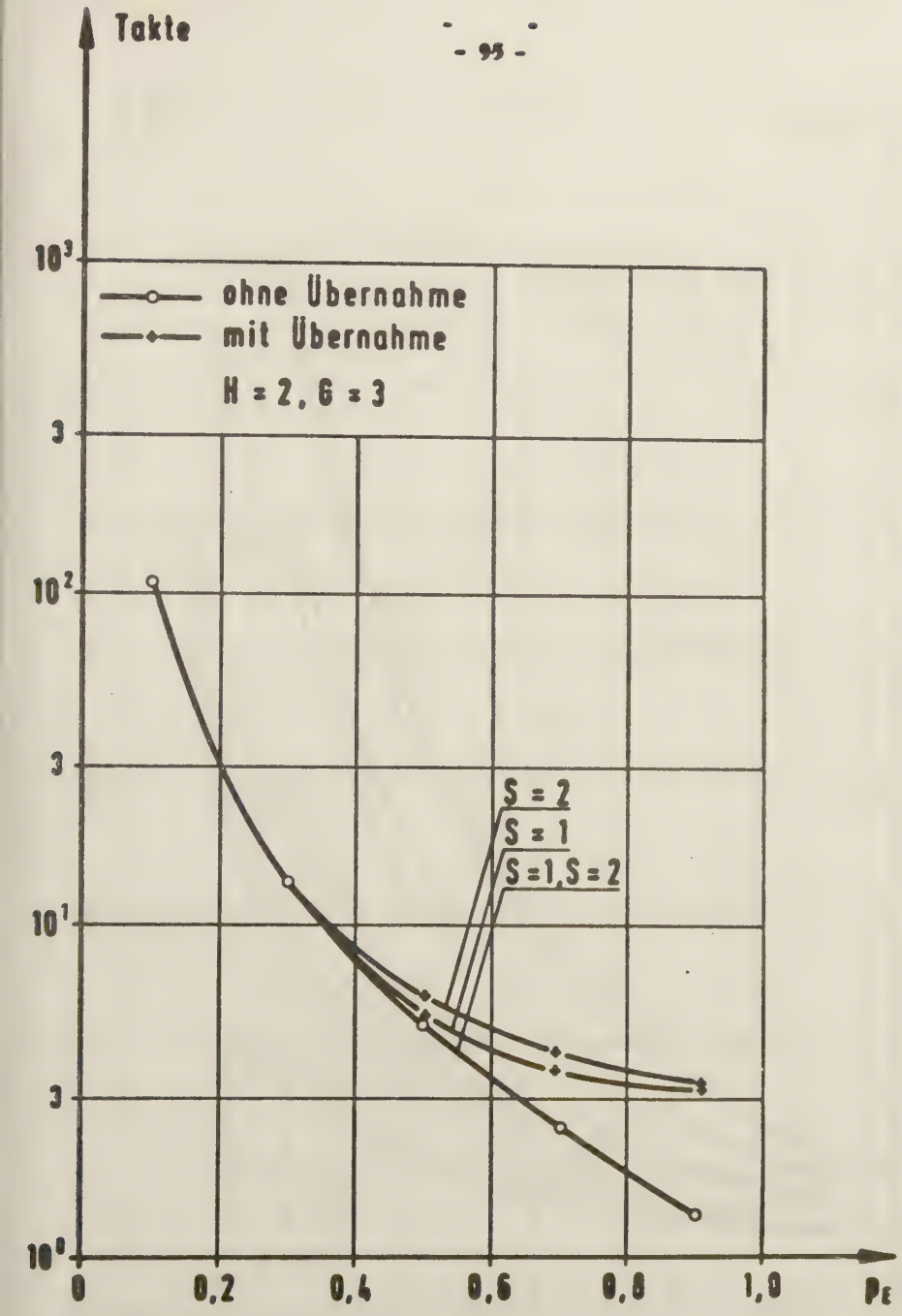


Abb. 6: Mittlere Ausfalldauer für Drei-Radar

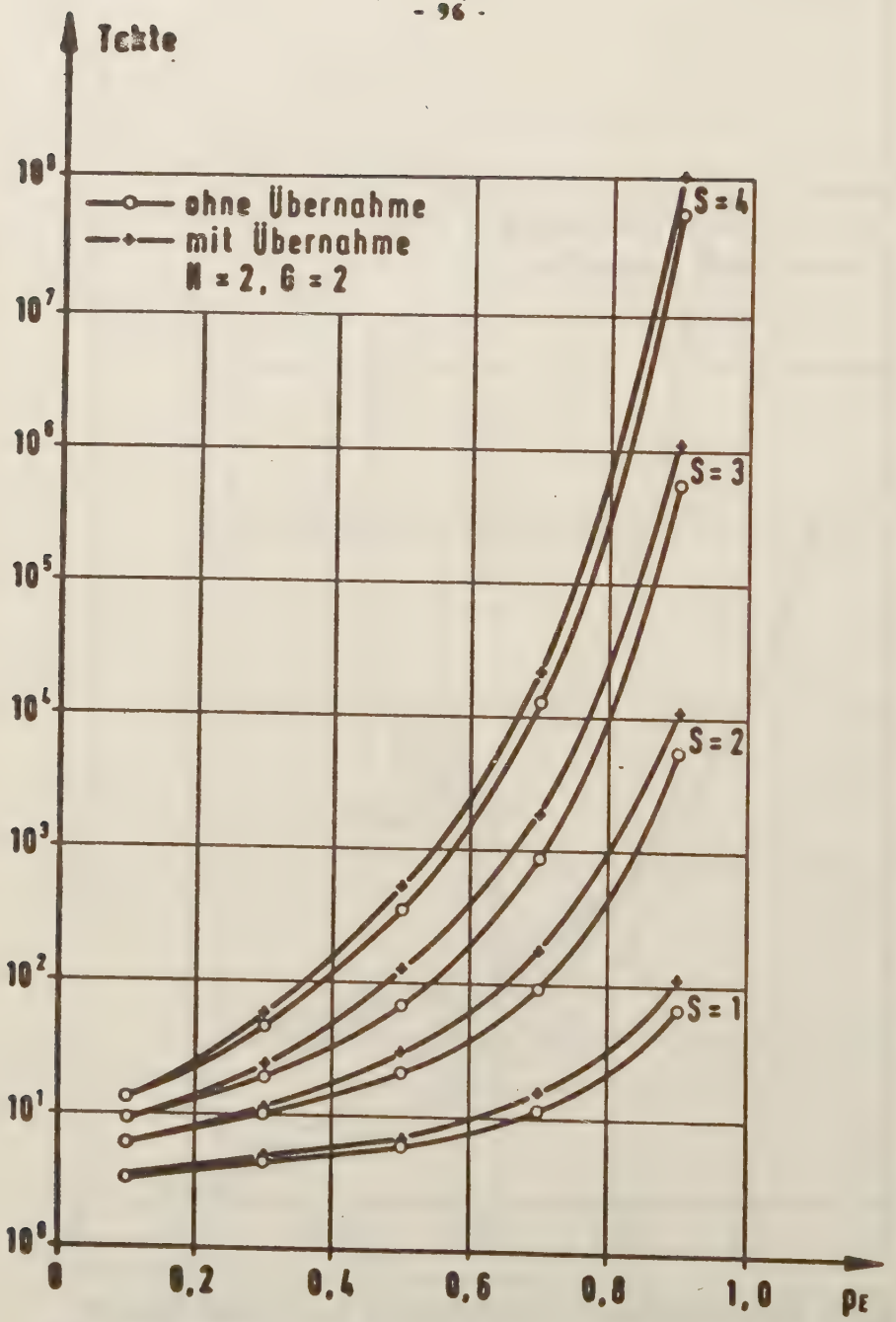


Abb. 7: Mittlere Spurlänge beim Auswahlverfahren

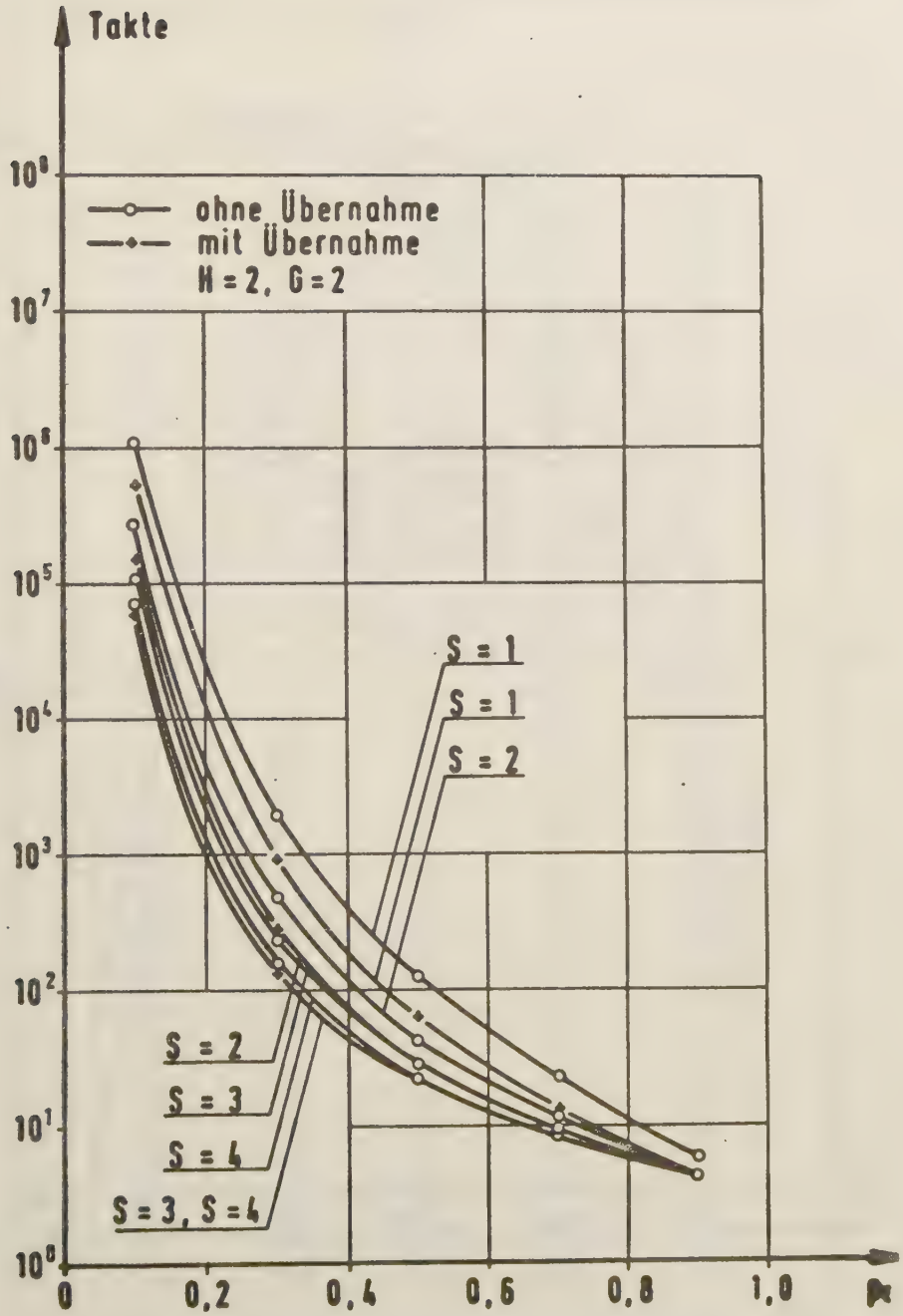


Abb. 8: Mittlere Ausfalldauer beim Auswahlverfahren

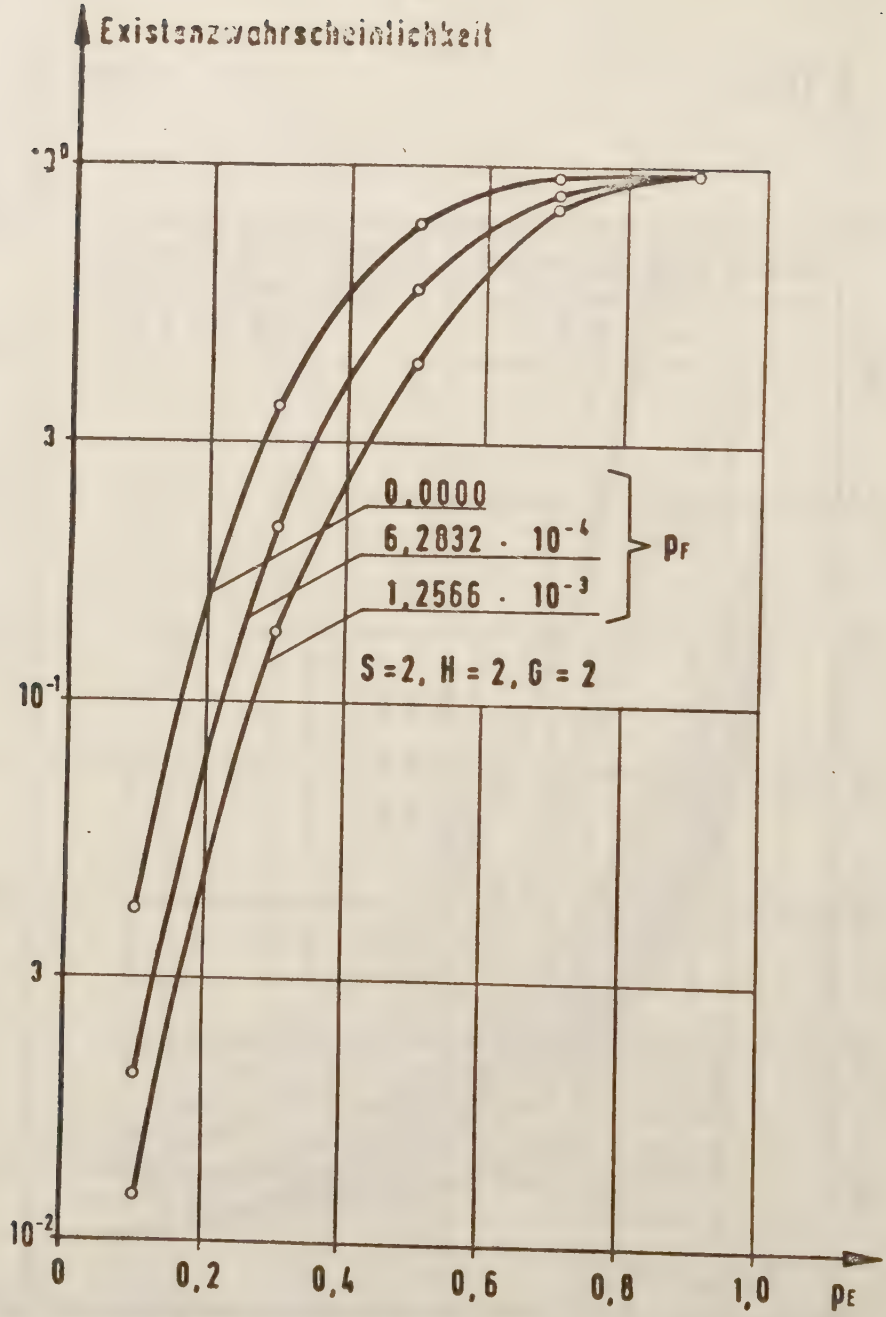


Abb. 9: Existenzwahrscheinlichkeit ohne Übernahme

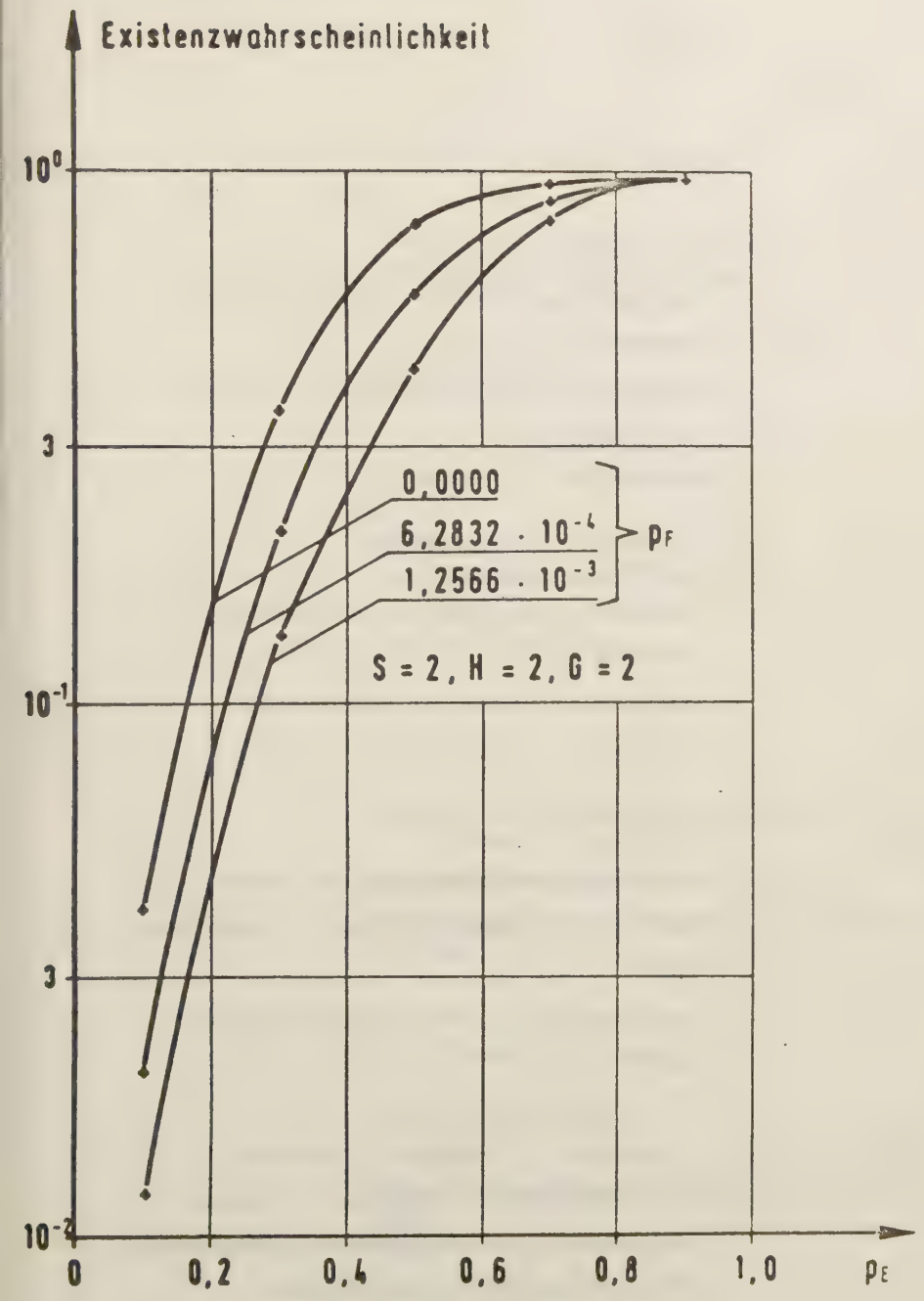


Abb. 10: Existenzwahrscheinlichkeit mit Übernahme

L I T E R A T U R

[1] H. Bobotek, G.G. Webb
THE USE OF SEARCH MEMORIES IN AUTOMATIC TRACKING
Franklin Institut, Philadelphia, Center of Naval Analyses
Oktober 1965

[2] M. Fisz
WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND MATHEMATISCHE STATISTIK
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften
Berlin 1958

[3] B.L. Fox, D.M. Landi
AN ALGORITHM FOR IDENTIFYING THE ERGODIC SUBCHAINS AND TRANSIENT STATES OF A STOCHASTIC MATRIX
Rand Corporation, Santa Monica, Californien
1967

[4] D. Gallrein, W. Grünewald, H. Hönerloh, H. v. Issendorff, W. Pandikow, H. Springer
MULTI-RADAR - EIN RADAR-RECHNER-VERBUNDSYSTEM ZUR AUTOMATISCHEN LUFTRAUMKONTROLLE
Elektronische Datenverarbeitung
Heft 5/1968

[5] W. Haack

AUTOMATION DES FLUGSICHERUNGSDIENSTES
MITTELS DIGITALER RECHENAUTOMATEN

Mathematik, Technik, Wirtschaft 8, 1961
Seite 1 - 8

[6] W. Haack u. H. Springer

AUTOMATISCHE AUSWERTUNG VON RADARINFORMATIONEN
UNTER BERÜCKSICHTIGUNG LERNENDER SYSTEME

Jahrbuch 1964 der WGLR

[7] H. Hönerloh

MODELLE FÜR FLUGVERFOLGUNGSVERFAHREN

Interne Mitteilungen aus dem Forschungs-
institut für Funk und Mathematik, Werthhoven
bei Bonn

[8] I. G. Kemeney, J.L. Snell

FINITE MARKOV CHAINS

D. van Nostrand Company, Princeton, New Jersey
1960

[9] I.M. Neill, H. Rubin

FIRST PASSAGE TIME AN OTHER ANALYSIS OF CONTINUOUS PARAMETER MARKOV CHAINS

Stanford University, Californien, Department of Statistic

November 1965

[10] S. Magowan

A PROPOSAL FOR AN AUTOMATIC TRACKING LOGIC BASED UPON PROBABILITY

Royal Radar Establishment Malvern, U.K. Memorandum No. 2253 Januar 1965

[11] W. Pandikow

STRATEGIE UND ORGANISATION DER MULTI-RADAR-BEOBACHTUNG

Elektronische Datenverarbeitung Heft 9 /1968

[12] S.C. Port

LIMIT THEOREMS FOR TRANSIENT MARKOV CHAINS

Rand Corporation, Santa Monica, Californien April 1966

13 H. Springer

MODELL EINES DATENVERARBEITUNGSSYSTEMS FÜR DIE FLUGSICHERUNG

Elektronische Datenverarbeitung
Heft 3/1965

14 W. Stern, W.D. Wirth

AUTOMATISCHE AUSWERTUNG DIGITALISIERTER RADARSIGNALE

NTZ Heft 12/1963

15 W.D. Wirth

DAS STATISTISCHE VERHALTEN DES WANDERFENSTER-DETEKTORS BEI KORRELIERTEM RAUSCHEN

Interne Mitteilungen aus dem Forschungsinstitut für Funk und Mathematik, Werthhoven bei Bonn

16 Sperry Rand Corporation; St. Paul, Minnesota
Univac Division

PROGRAMMING, INTEGRATION AND CHECKOUT OF THE ADVANCED RADAR TRAFFIC CONTROL SYSTEM

Final Report
April 1965

[17] Automatic Tracking

FEDERAL AVIATION AGENCY/I.B.M. NAS DOCUMENTS
LIBRARY NAFEC, ATLANTIC CITY, NEW JERSEY

August 1967

[18] Multiple Radar Data Processing

FEDERAL AVIATION AGENCY/I.B.M. NAS DOCUMENTS
LIBRARY NAFEC, ATLANTIC CITY, NEW JERSEY

August 1967

L E B E N S L A U F

Am 8. August 1937 wurde ich als Sohn des Pfarrers Karl Pandikow und seiner Ehefrau Hildegard, geb. Bendig, in Tribsees, Kreis Grimmen, geboren.

Vom Herbst 1943 bis zum Herbst 1947 besuchte ich die Grundschule in Tribsees.

Im Herbst 1947 wurde mein Vater nach Altentreptow bei Neubrandenburg versetzt. Ich besuchte von 1947 bis 1951 hier die Grundschule und von 1951 bis 1954 die Friedrich-Engels-Oberschule in Neubrandenburg, die ich im Sommer 1954 aus politischen Gründen verlassen mußte.

Vom August 1954 bis zum Abitur im März 1957 besuchte ich die Bertha-von-Suttner-Schule in Westberlin.

Vom Sommersemester 1957 bis einschließlich zum Wintersemester 1963/64 studierte ich an der Freien Universität in Berlin Mathematik und machte mein Diplomexamen im März 1964.

Im April 1964 wurde ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter beim Forschungsinstitut für Funk und Mathematik in Berlin angestellt. Seit 1965 befindet sich das Institut in Werthhoven bei Bonn.

Mein derzeitiger Wohnsitz ist Bad Godesberg.

Bad Godesberg, im Juli 1969

Wolfgang Pandikow